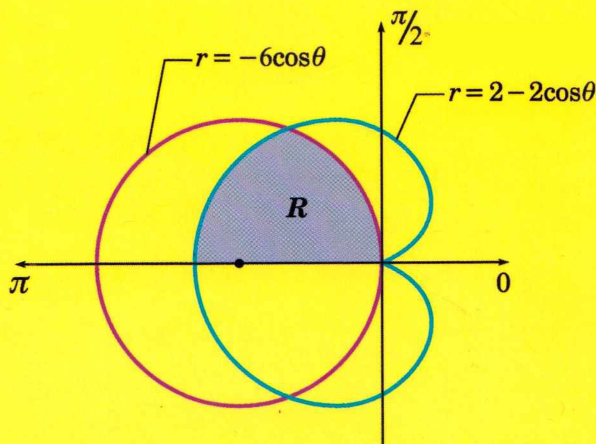
cálculo integral

Y SUS APLICACIONES



$$A(R)=\int_{\pi/2}^{2\pi/3} r^2 d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi} r^2 d\theta$$

Moisés LÁZARO Carrión

cálculo integral

Y SUS APLICACIONES

- La antiderivada y la integral indefinida.
- Aplicaciones de la integral definida.

Moisés Lázaro Carrión

Estudios: Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).

Experiencia Docente:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martín de Porres

La presentación y disposición en conjunto de:

CÁLCULO INTEGRAL
Y SUS APLICACIONES

Autor: Moisés Lázaro C.

Son propiedad del autor:

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°.... : 2014-01136
International Standard Book Number ISBN N°............................ : 978-9972-813-80-1

Tercera Edición: Enero 2014

Tiraje: 1000 ejemplares

Obra editada, impresa y distribuida por:
Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería

Impreso en Perú   Printed in Perú

A Cirila, hermana y madre ejemplar

PRÓLOGO

Este libro expone las técnicas de integración de funciones reales de variable real y sus aplicaciones, explicados de una manera sencilla y fácil de entender. Es un gran complemento para los cursos que hacen uso de las integrales indefinidas y definidas tales como los cursos de Física y los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias básicas.

No es un libro de Análisis Matemático de las integrales de funciones reales de variable real, sino un libro de Cálculo Integral, cuya única finalidad es dar pausas precisas del buen manejo de las fórmulas elementales de las antiderivadas de las funciones polinómicas, racionales, irracionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc. a su vez, explicar los diversos métodos de integración.

Para aprender el Cálculo Integral, sólo se requiere saber el algebra elemental y un poco de trigonometría.

Este libro, se ha preparado pensando en los estudiantes que requieren aprender el Cálculo Integral, que se estudia en los primeros ciclos de la Universidad o Institutos Superiores.

En dos capítulos se cubren dos temas del Cálculo Integral: el primer capítulo se refiere a las técnicas de integración y el segundo capítulo se refiere a las aplicaciones del Cálculo Integral en lo que respecta al Cálculo de Áreas en sus formas rectangular, paramétrica y polar.

Al final de cada capítulo se dan problemas propuestos que todo lector debe entrenarse.

El *autor*.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

LA ANTIDERIVADA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

CAPÍTULO 2

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

CAPÍTULO 1

LA ANTIDERIVADA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

Antes de hacer las respectivas definiciones de la antiderivada y la integral indefinida, es necesario recordar los siguientes temas:

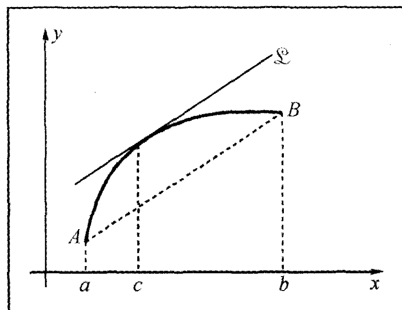
1. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y si $f(x)$ es diferenciable en el intervalo abierto $]a,b[$, entonces existe por lo menos un número c, $a<c<b$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$f'(c)$: pendiente de la tangente $\mathfrak{L}$ en $x=c$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: pendiente de $\overline{AB}$



$\mathfrak{L}$ es paralelo a $\overline{AB}$.

APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

1.1 TEOREMA DE LA FUNCIÓN CONSTANTE

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, entonces: $f'(x)=0$ si y sólo si $f(x)=k$, $k=$ constante.

Este teorema nos dice: si la derivada de una función es cero, entonces dicha función es una constante y recíprocamente, la derivada de una constante es cero.

***Ejemplos*:**

① Si $y'=0$, donde $y'=\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \quad y=k$

② Si $y'=2x$

$\Rightarrow \quad (y-x^2)'=0$

$\Rightarrow \quad (y-x^2=C$

$y=x^2+C$, $C=$ constante

③ Si $y''=12x$, $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$

$(y'-6x^2)'=0$, $y'=\frac{dy}{dx}$, $y=f(x)$

$y'-6x^2=C_1$

$(y-2x^3-C_1x)'=0$

$y-2x^3-C_1x=C_2$

$y=2x^3+C_1x+C_2$; C_1, C_2 son constantes.

1.2 COROLARIO [DE LA DIFERENCIA CONSTANTE]

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas sobre $[a,b]$ y diferenciables sobre $]a,b[$, entonces:

$\boxed{f'(x)=g'(x)\ ,\ \forall\ x\in\ ]a,b[}$ si y sólo si $\boxed{f(x)=g(x)+C}$

Prueba

($\Rightarrow$) Por hipótesis: $f'(x) = g'(x)$; $a < x < b$

$(f(x) - g(x))' = 0$ .... Según el Teorema 1.1

$f(x) - g(x) = C \Rightarrow f(x) = g(x) = C$

($\Leftarrow$) Por hipótesis: $f(x) = g(x) = C$; $\forall\, x \in \,]a,b[$

Derivar: $f'(x) = g'(x) + 0$

Así queda: $f'(x) = g'(x)$

2. LA ANTIDERIVADA DE UNA FUNCIÓN

2.1 Definición

Decimos que una función $F(x)$ es una **ANTIDERIVADA** de otra función $f(x)$ continua en un intervalo I, si se cumple:

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall\, x \in I}$$

Ejemplos:

1. La antiderivada de $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3$, porque $F'(x) = 3x^2$.

2. La antiderivada de $f(x) = \cos 2x$ es $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$, pues

$$F'(x) = \tfrac{1}{2} 2\cos 2x$$
$$F'(x) = \cos 2x$$
$$= f(x)$$

3. La antiderivada de $g(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$ es $G(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2 - 2)$ pues:

$$G'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 - 2} = \frac{2x}{x^2 - 2} = f(x)$$

2.2 LA ANTIDERIVADA GENERAL

Si $F(x)$ es una **ANTIDERIVADA** de $f(x)$ sobre el intervalo I, es decir:

Si $F'(x) = f(x)$ sobre I, entonces la función.

$G(x) = F(x) + C$ es la ANTIDERIVADA GENERAL de $f(x)$.

Ejemplos:

1. La Antiderivada General de $f(x)=3x^2$ es $g(x)=\underbrace{x^3}_{F(x)}+C$

2. La Antiderivada General de $f(x)=\cos 2x$ es $G(x)=\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x}_{F(x)}+C$

3. La Antiderivada General de $g(x)=\frac{x}{x^2-2}$ es $H(x)=\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2-2)}_{G(x)}+K$

4. La Antiderivada General de $f(x)=5$ es $F(x)=5x+C$

5. La Antiderivada General de $f(x)=x$ es $F(x)=\frac{x^2}{2}+C$

6. La Antiderivada General de $f(x)=\frac{1}{x}$ es $F(x)=\operatorname{Ln}|x|+C$

7. La Antiderivada General de $f(x)=\frac{2}{1-x}$ es $F(x)=-2\operatorname{Ln}|1-x|+C$

8. La Antiderivada General de $f(x)=e^{2x}$ es $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

9. La Antiderivada General de $f(x)=3e^{-2x}$ es $F(x)=-\frac{3}{2}e^{-2x}+C$

10. La Antiderivada General de $f(x)=xe^{-x^2}$ es $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

3. LA INTEGRAL INDEFINIDA

3.1 DEFINICIÓN

Se llama **INTEGRAL INDEFINIDA** de una función $f(x)$, a la antiderivada general de la función.

Es decir, si $f(x)=F'(x)$, $\forall\, x\in I$ entonces:

$$G(x)=\underbrace{\int f(x)dx}=F(x)+C \quad , \quad \forall\, x\in I$$

Denota a todas las antiderivadas de la función $f(x)$

Ejemplos:

① $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

② $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$

③ $\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$

④ $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$

⑤ $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x} + C$, $x < 1$

> **Nota:** *La integral indefinida es el proceso de hallar la antiderivada general de la función.*

De la definición: $\int f(x) = F(x) + C$, Si $F'(x) = f(x)$

se deduce $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

Usando diferenciales, si

$$dF(x) = F'(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

o $\int F'(x)dx = F(x) + C$

3.2 REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena, es: $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$

Ejemplos:

① $$\int (1-x^2)^3(-2x)dx = \tfrac{1}{4}(1-x^2)^4 + C$$

$u(x) = 1 - x^2$

$u'(x) = -2x$ ⟵ derivada de u respecto a x.

$du = u'(x)dx$ ⟵ diferencial de u es igual a la derivada de u por el diferencial de x.

② $$\int \frac{1}{1-x^2}(-2x)dx = \text{Ln}(1-x^2) + C \quad , \quad -1 < x < 1$$

$u(x) = 1 - x^2$

$u'(x) = -2x \quad , \quad du = \mu'(x)dx$

3.3 PROPIEDADES ELEMENTALES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

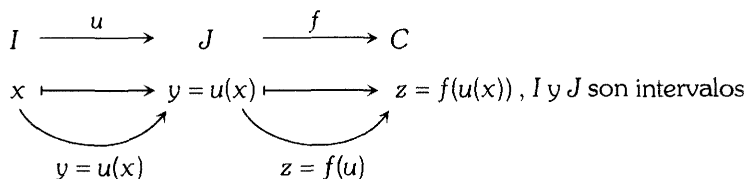
① $\int c\,f(x)dx = c\int f(x)dx \quad c = \text{constante real}$

② $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

③ $\int [a\,f(x) \pm b\,g(x)]dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$

3.4 TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIADLE EN UNA INTEGRAL INDEFINIDA

Sea la composición de las funciones f y u expresado por $z = f(u(x))$, donde:



Las hipótesis son:

1) $f(u)$ es continua en J.
2) $y=u(x)$ tiene derivada continua con inversa $x=u*(y)$ sobre I.
3) $u'(x)=0$, $\forall\, x\in I$.
4) $\text{Rang}(u)=u(I)\subset J$.

Entonces, para $y\in \text{Rang}(u)$, se cumple:

$$\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u)du \quad , \quad u=u(x).$$

Ejemplos:

① $$\int x\cdot(1-x^2)^5dx=\int x\cdot\mu^5\cdot\frac{d\mu}{-2x}=-\frac{1}{2}\int\mu^5d\mu=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu^6}{6}+C$$

$$=-\frac{1}{12}\mu^6+C=-\frac{1}{12}(1-x^2)^6+C$$

donde: $1-x^2=\mu$

$-2xdx=d\mu$

$dx=\frac{d\mu}{-2x}$

② $$\int\frac{x}{1-x^2}dx=\int\frac{x}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{-2x}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{1}{2}\text{Ln}\,\mu+C \quad , \quad \mu>0$$

$$=-\frac{1}{2}\text{Ln}\,(1-x^2)+C \quad , \quad -1<x<1$$

Hacer: $1-x^2=\mu$

$-2x\,dx=d\mu$

$dx=\frac{d\mu}{-2x}$

③ $$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}dx = \int \frac{x^2}{1+\mu^2}\cdot\frac{d\mu}{3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\mu}{1+\mu^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u + C$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C$$

Hacer : $x^3 = \mu$

$3x^2\,dx = d\mu$

$dx = \frac{1}{3x^2}d\mu$

④ $$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx = \int \frac{e^u}{1+x^2}(1+x^2)\,du = \int e^u \cdot du = e^u + C$$

$$= e^{\operatorname{arctg} x} + C$$

Hacer : $\operatorname{arctg} x = \mu$

$\frac{1}{1+x^2}dx = d\mu$

$dx = (1+x^2)d\mu$

3.5 INTEGRALES INMEDIATAS

INTEGRAL DE LA DIFERENCIAL DE UNA VARIABLE

① $$\boxed{\int dx = x + C}$$

Se lee: "La integral del diferencial de x, es igual a "x""

Ejemplos:

① $\int d\theta = \theta + C$

② $\int dt = t + C$

③ $\int dv = v + C$

④ $\int 3dy = 3\int dy = 3y + C$

⑤ $\int dA = A + C$

⑥ $\int d\ell = \ell + C$

INTEGRAL DE LA POTENCIA DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD

(2) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{R},\ n \neq -1$$

Se lee "La integral de x^n es igual a x^{n+1} dividido entre $n+1$" siempre que $n \neq -1$. Donde $f(x) = x$ es la función identidad.

Ejemplos:

(1) $$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

(2) $$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

(3)
$$\int 2x^{-5} dx = 2\int x^{-5} dx = 2\,\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C$$
$$= 2\,\frac{x^{-4}}{-4} + C$$
$$= -\frac{1}{2x^4} + C$$

(4) $$\int \frac{5}{x^8} dx = 5\int x^{-8} dx$$
$$= 5\,\frac{x^{-8+1}}{-8+1} + C$$
$$= 5\,\frac{x^{-7}}{-7} + C$$
$$= -\frac{5}{7x^7} + C$$

(5) $$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C$$
$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$
$$= \frac{2}{3}\,x^{3/2} + C$$

(6) $$\int \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} dx = 3\int x^{-3/5} dx$$
$$= 3\,\frac{x^{-3/5+1}}{-3/5+1} + C = 3\,\frac{x^{2/5}}{2/5} + C$$
$$= \frac{15}{2}\,x^{2/5} + C$$

(7) $$\int \frac{3}{\sqrt{2x}} dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \int x^{-1/2} dx$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C$$
$$= \frac{6}{\sqrt{2}}\sqrt{x} + C$$
$$= 3\sqrt{2}\,\sqrt{x} + C$$

(8) $$\int[2x^2 - \tfrac{1}{3}x - 5\sqrt{x}\,]dx = 2\int x^2dx - \tfrac{1}{3}\int x\,dx - 5\int x^{1/2}dx$$
$$= 2\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} - 5\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$
$$= \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{10}{3}x^{3/2} + C$$

INTEGRAL DE LA POTENCIA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

(3) $$\int \mu^m d\mu = \frac{\mu^{m+1}}{m+1} + C \qquad m \in \mathbb{R},\ m \neq -1$$

Se lee: "La integral de μ^m es igual a μ^{m+1} dividido entre $m+1$" siempre y cuando exista la derivada de la base μ".
Donde μ^m es la potencia de la función compuesta μ.

Observación: *Si no existe la derivada de la base μ, entonces no se puede utilizar la fórmula (3)*

Ejemplos:

(1) $I = \int x\sqrt{4x^2 - 5}\,dx$

Solución:

La base es $\mu = 4x^2 - 5$

El diferencial de μ es $d\mu = 8x\,dx$

$dx = \frac{1}{8x}d\mu$

sustituir en I:

$$I = \int x\,\mu^{1/2}\,\tfrac{1}{8x}d\mu = \tfrac{1}{8}\int \mu^{1/2}\,d\mu$$
$$= \frac{1}{8}\frac{\mu^{1/2+1}}{1/2+1} + C$$
$$= \frac{1}{8}\frac{\mu^{3/2}}{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{2}{3}\,\mu^{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{12}(4x^2 - 5)^{3/2} + C$$

② Calcular $I = \int \sqrt{1-3x}\,dx$

Solución:

La base es: $\mu = 1 - 3x$

su diferencial: $d\mu = -3dx$

$dx = -\frac{1}{3}d\mu$

sustituir en I :

$$I = \int \mu^{1/2}\left(-\tfrac{1}{3}\right)d\mu$$

$$= -\tfrac{1}{3}\int \mu^{1/2}d\mu$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\mu^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= -\tfrac{2}{9}(1-3x)^{3/2} + C$$

> ***Nota:*** *Para evitar muchas sustituciones, recomiendo hacer dicha integral directamente sólo averiguando si existe la derivada de la base μ. Cuando al derivar la base, faltase sólo una constante, entonces en el resultado de la integral escribimos multiplicando el inverso de dicha constante.*

③ Calcular $I = \int x^2\sqrt[3]{2-5x^3}\,dx$.

Solución:

La base es: $\mu = 2 - 5x^3$, su diferencia es: $d\mu = -15x^2dx$.

Como vemos, dentro de la integral no existe la constante -15 en consecuencia agregamos en el resultado, la inversa de -15 que es $\frac{1}{-15}$.

Así tendremos:

$$I = \int x^2\sqrt[3]{2-5x^3}\,dx$$

$$= \int x^2(2-5x^3)^{1/3}dx$$

La derivada de $2-5x^3$ es $-15x^2$

Entonces:

$$= -\tfrac{1}{15}\int(-15x^2)(2-5x^3)^{1/3}dx$$

$$= \frac{1}{-15}\frac{(2-5x^3)^{1/3+1}}{1/3+1} + C$$

$$= \frac{1}{-15}\frac{3}{4}(2-5x^3)^{4/3} + C$$

$$= -\tfrac{1}{20}(2-5x^3)^{4/3} + C$$

(4) Calcular: $I = \int x\sqrt[4]{1-3x^2}\,dx$

Solución:

La base es : $\mu = 1-3x^2$

Su diferencial es : $d\mu = \underbrace{-6x}\,dx$

Dentro de la integral falta el número –6, entonces al integrar, se agrega $-\frac{1}{6}$.

Así tendremos:

$$I = \int x(1-3x^2)^{1/4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\,\frac{(1-3x^2)^{1/4+1}}{\frac{1}{4}+1} + C$$

$$= -\frac{2}{15}(1-3x^2)^{\frac{5}{4}} + C$$

(5) Calcular:

$$I = \int \operatorname{sen}2x\cos^2 2x\,dx$$

Solución:

La base es: $\mu = \cos 2x$

Su diferencial es $d\mu = \underbrace{-2}_{\text{Falta}}\operatorname{sen}2x\,dx$

Luego:

$$I = \int \operatorname{sen}2x\cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{-2}\,\frac{\cos^3 2x}{3} + C$$

$$= -\frac{1}{6}\cos^3 2x + C$$

(6) Calcular: $I = \int \frac{1}{\sqrt{3-4x}}\,dx$

Solución:

Hacer: $I = \int \underbrace{(3-4x)}_{-4}^{-\frac{1}{2}}\,dx$

↑ Falta

Al integrar, hacemos:

$$I = -\frac{1}{4}\,\frac{(3-4x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{3-4x} + C$$

(7) Calcular: $I = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Solución:

Hacer: $I = \int x\underbrace{(4-x^2)}_{-2x}^{-\frac{1}{2}}\,dx$

↑ Falta

Al integrar, hacemos:

$$I = -\frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$I = -\sqrt{4-x^2} + C$$

(8) Calcular: $I = \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3-2\operatorname{sen}2x}}$

Solución:

Pero:

$$I = \int \cos 2x\,(3-2\operatorname{sen}2x)^{1/2}\,dx$$

La base es: $\mu = 3 - 2\operatorname{sen} 2x$

$$\Rightarrow \quad d\mu = \underbrace{-4}_{\text{Falta}} \cos 2x\, dx$$

Luego:

$$I = \int \cos 2x(3 - 2\operatorname{sen} 2x)^{-1/2} dx$$

$$= \frac{1}{-4} \frac{(3 - 2\operatorname{sen} 2x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{2}{-4}(3 - 2\operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{3 - 2\operatorname{sen} 2x} + C$$

(9) Calcular: $I = \int \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$

Solución:

Hacer: $I = \int (4-x)^{-1/2} dx$

La base es $\mu = 4 - x$

su diferencial $d\mu = \underbrace{-1}_{\text{Falta}} dx$

Al integrar agregamos la inversa de -1, que es -1.

Así obtenemos:

$$I = -\frac{(4-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$I = -2\sqrt{4-x} + C$$

(10) Calcular: $I = \int \sec^2\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

Solución:

La base es: $\mu = \operatorname{tg}\theta$

$$\Rightarrow \quad d\mu = \sec^2\theta\, d\theta$$

Luego: $I = \int \sec^2\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

$$I = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{2} + C$$

(11) Calcular: $I = \int \operatorname{sen} 3x \cos^3 3x\, dx$

Solución:

La base es: $\mu = \cos 3x$

$$d\mu = -3\operatorname{sen} 3x\, dx$$

Al integrar obtenemos:

$$I = -\frac{1}{3}\frac{\cos^4 3x}{4} + C$$

$$= -\frac{1}{12}\cos^4 3x + C$$

(12) Calcular: $I = \int \frac{\operatorname{Ln} x}{2x} dx$

Solución:

La base es: $\mu = \operatorname{Ln} x$

$$\Rightarrow \quad d\mu = \frac{1}{x} dx$$

Pero: $I = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{Ln} x}{x} dx$

Integrando: $I = \frac{1}{2}\frac{L^2 nx}{2} + C$

$$= \frac{1}{4}L^2 nx + C$$

(13) Calcular: $I = \int \cos 2x \operatorname{sen}^3 2x\, dx$

Solución:

La base es: $\mu = \text{sen}\,2x$

$d\mu = 2\cos 2x\,dx$

Al integrar, obtenemos:

$$I = \frac{1}{2}\frac{\text{sen}^4 2x}{4} + C$$

$$I = \frac{1}{8}\text{sen}^4 2x + C$$

(14) Calcular:

$$I = \int e^{2x}\sqrt[3]{(4-5e^{2x})^2}\,dx$$

Solución:

Pero: $I = \int e^{2x}\underbrace{(4-5e^{2x})}_{\underbrace{-10}_{\text{Falta}}e^{2x}}{}^{2/3}\,dx$

Integrando

$$I = \frac{1}{-10}\frac{\left(4-5e^{2x}\right)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

$$= -\frac{3}{50}(4-5\,e^{2x})^{5/3} + C$$

(15) Calcular: $I = \int \text{tg}^3\,\theta\sec^2\theta\,d\theta$

La base es: $\mu = \text{tg}\,\theta$

$d\mu = \sec^2\theta\,d\theta$

Al integrar: $I = \frac{1}{4}\text{tg}^4\,\theta + C$

(16) Calcular: $I = \int\sqrt{1-2x}\,dx$

Solución:

Pero: $I = \int \underbrace{(1-2x)}_{-2}{}^{1/2}\,dx$

Luego: $I = \frac{1}{-2}\frac{(1-2x)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$$= -\frac{1}{3}(1-2x)^{3/2} + C$$

(17) Calcular: $I = \int \sec^4\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$

Solución:

Hacer: $I = \int \sec^3\theta(\sec\theta\,\text{tg}\,\theta)d\theta$

La base es: $\mu = \sec\theta$

$d\mu = \sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$

Luego, la integral es:

$$I = \frac{1}{4}\sec^4\theta + C$$

INTEGRAL DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN

(4) $$\int a \cdot \mu(x) \cdot dx = a \int \mu(x) \cdot dx$$

*Se lee: "La integral de una constante **a** por una función, $\mu(x)$ es igual al producto de la constante **a** multiplicado por la integral de la función $\mu(x)$".*

Ejemplos:

(1) Calcular: $I = \int 5\sqrt{1-x}\,dx$

Solución:

$$I = 5\int \sqrt{1-x}\,dx$$

$$= 5\int \underbrace{(1-x)^{1/2}dx}_{-1}$$

$$= 5\,\frac{1}{-1}\,\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{10}{3}(1-x)^{3/2} + C$$

(2) Calcular: $I = \int \frac{2}{5}x\,\sqrt[3]{5-\frac{1}{5}x^2}\,dx$

Solución:

$$I = \frac{2}{5}\int x(5-\tfrac{1}{5}x^2)^{1/3}dx$$

La base es: $\mu = 5 - \frac{1}{5}x^2$

$\Rightarrow \quad d\mu = \underbrace{-\frac{2}{5}}\,x\,dx$

Falta $-\frac{2}{5}$ dentro de la integral.

Por lo tanto:

$$I = \frac{2}{5}\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{\left(5-\frac{1}{5}x^2\right)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$I = -\frac{3}{4}\left(5-\tfrac{1}{5}x^2\right)^{4/3} + C$$

(3) Calcular: $I = \int 3\csc^2\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta\,d\theta$

Solución:

$$I = 3\int \csc^2\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta\,d\theta$$

La base es: $\mu = \mathrm{ctg}\,\theta$

$\Rightarrow \quad d\mu = -\csc\theta$

Luego: $I = 3\,\frac{1}{-1}\,\frac{\mathrm{ctg}^2\theta}{2} + C$

$= -\frac{3}{2}\,\mathrm{ctg}^2\theta + C$

(4) Calcular: $I = \int \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-\sqrt{3}\,x}\,dx$

Solución:

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\int (3-\sqrt{3}\,x)^{1/2}dx$$

La base es $\mu = 3-\sqrt{3}\,x$

$\Rightarrow \quad d\mu = -\sqrt{3}\,dx$

Luego:

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)\frac{(3-\sqrt{3}\,x)^{3/2}}{3/2}+C$$
$$= -\frac{4}{9}(3-\sqrt{3}\,x)^{3/2}+C$$

INTEGRAL DE UNA SUMA

(5) $$\int(\mu+\nu)\,dx = \int \mu\,dx + \int \nu\,dx + C \qquad \mu=\mu(x),\ \nu=\nu(x)$$

Ejemplos:

① Calcular: $I = \int(\sqrt{x}-x)^2\,dx$

Solución:

$$I = \int(x-2x\sqrt{x}+x^2)\,dx$$
$$I = \int x\,dx - 2\int x^{3/2}dx + \int x^2 dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2\,\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^3}{3}+C$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}x^{5/2} + \frac{x^3}{3}+C$$

② Calcular: $I = \int \frac{(x^2-5)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Solución:

$$I = \int \frac{x^4-10x^2+25}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$I = \int \frac{x^4}{\sqrt{x}}\,dx - 10\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx + 25\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \int x^{7/2}dx - 10\int x^{3/2}dx + 25\int x^{-1/2}dx$$
$$= \frac{2}{9}x^{9/2} - 4x^{5/2} + 50x^{1/2}+C$$

(6) $$\int \frac{d}{dx}(f(x))\,dx = f(x)+C$$

Ejemplos:

① $\int \frac{d}{dx}(5x^2+2x-3)\,dx = 5x^2+2x-3+C$

② $\int \frac{d}{dx}(2x-x^3+e^x)\,dx = 2x-x^3+e^x+C$

③ $\int \frac{d}{dx}(\text{sen}\,2x-5x^2)\,dx = \text{sen}\,2x-5x^2+C$

④ $\int \frac{d}{dx}(\text{Ln}\,x-3x)\,dx = \text{Ln}\,x-3x+C$

(7) $$\int \frac{d\mu}{\mu} = Ln|\mu| + C \qquad \mu = \mu(x)$$

Se lee: *"la integral de una función **RACIONAL** en el que, la derivada del denominador existe en el numerador, es igual al LOGARITMO NATURAL del denominador".*

Ejemplos:

(1) Calcular: $I = \int \frac{1}{x} dx$

Solución: $I = \text{Ln}|x| + C$

(2) $I = \int \frac{1}{x-1} dx = Ln|x-1| + C$

(3) Calcular: $I = \int \frac{x}{4x^2-5} dx$

Solución:

El denominador es $\mu = 4x^2 - 5$

su diferencial es: $d\mu = 8x\,dx$

$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{8x} d\mu$

Sustituir en I : $I = \int \frac{x}{\mu} \frac{1}{8x} d\mu$

$= \frac{1}{8} \int \frac{d\mu}{\mu}$

$= \frac{1}{8} \text{Ln}|\mu| + C$

$= \frac{1}{8} \text{Ln}|4x^2 - 5| + C$

(4) Calcular: $I = \int \frac{5x^2}{4-3x^3} dx$

Solución:

El denominador es $\mu = 4 - 3x^3$

Su diferencial es: $d\mu = -9x^2 dx$

$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{-9x^2} d\mu$

Sustituir en I : $I = \int \frac{5x^2}{\mu} \frac{1}{-9x^2} d\mu$

$= -\frac{5}{9} \int \frac{d\mu}{\mu}$

$= -\frac{5}{9} \text{Ln}|\mu| + C$

$= -\frac{5}{9} \text{Ln}|4 - 3x^3| + C$

(5) Calcular: $I = \int \frac{e^{2x}}{3-4e^{2x}} dx$

Solución:

El denominador es $\mu = 3 - 4e^{2x}$

su diferencial es: $d\mu = \underbrace{-8}_{\text{falta}}\ \underbrace{e^{2x}}_{\text{existe}}\, dx$

$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{-8\,e^{2x}} d\mu$

Sustituir en I:

$$I = \int \frac{e^{2x}}{\mu} \frac{1}{-8e^{2x}} d\mu$$

$$= -\frac{1}{8} \int \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{8} \operatorname{Ln}|\mu| + C$$

$$= -\frac{1}{8} \operatorname{Ln}|3 - 4e^{2x}| + C$$

(6) Calcular: $I = \int \frac{3}{5 - 2e^{-3x}} dx$

Solución:
En este caso la derivada del denominador no existe en el numerador, pero haciendo una simple operación algebraica en el denominador obtendremos su derivada.

Así: $I = \int \frac{3}{5 - \frac{2}{e^{3x}}} dx$

$$I = \int \frac{3e^{3x}}{5e^{3x} - 2} dx$$

El denominador es $\mu = 5e^{3x} - 2$

su diferencial es: $d\mu = 15e^{3x} dx$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{15e^{3x}} d\mu$$

Sustituir en I: $I = \int \frac{3e^{3x}}{\mu} \frac{1}{15e^{3x}} d\mu$

$$= \frac{3}{15} \int \frac{d\mu}{\mu}$$

$$= \frac{1}{5} \operatorname{Ln}|\mu| + C$$

$$= \frac{1}{5} \operatorname{Ln}|5e^{3x} - 2| + C$$

(7) Calcular: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4 - 3\sqrt{x})}$

Solución:

Pero: $I = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4 - 3\sqrt{x}} dx$

En este caso, escoger

$$\mu = 4 - 3\sqrt{x}$$

Donde $d\mu = \frac{-3}{2\sqrt{x}} dx$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Falta

Integrando: $I = -\frac{3}{2} \operatorname{Ln}|4 - 3\sqrt{x}| + C$

(8) Calcular: $I = \int \frac{dx}{x(3 - 2\operatorname{Ln} x)}$

Solución:

Pero: $I = \int \frac{\frac{1}{x}}{3 - 2\operatorname{Ln} x} dx$

Si $\mu = 3 - 2\operatorname{Ln} x$

$$\Rightarrow \quad d\mu = (-2) \frac{1}{x} dx$$

Falta

Integrando: $I = \frac{1}{-2} \operatorname{Ln}|3 - 2\operatorname{Ln} x| + C$

(9) Calcular: $I = \int \frac{\cos 3x}{3 - 2\operatorname{sen} 3x} dx$

Solución:
El denominador es

$$\mu = 3 - 2\operatorname{sen} 3x$$

$$\Rightarrow \quad d\mu = (-6) \cos 3x \, dx$$

Falta

Integrando: $I = \frac{1}{-6} \operatorname{Ln}|3 - 2\operatorname{sen} 3x| + C$

(10) Calcular: $I = \int \frac{5\sec^2 2x}{3-2\operatorname{tg}2x}dx$

Solución:

$$I = 5\int \frac{\sec^2 2x}{3-2\operatorname{tg}2x}dx$$

El denominador es: $\mu = 3 - 2\operatorname{tg}2x$

su diferencial es: $d\mu = (-4)\sec^2 2x\,dx$

└── **Falta**

Integrando: $I = 5\frac{1}{-4}\text{Ln}|3-2\operatorname{tg}2x|$

$$= -\frac{5}{4}\text{Ln}|3-2\operatorname{tg}2x| + C$$

(11) Calcular: $I = \int \frac{1-3x}{2x-3x^2}dx$

Solución:

$\mu = 2x - 3x^2 \Rightarrow d\mu = (2-6x)dx$

$= (2)(1-3x)dx$

└── **Falta**

Integrando: $I = \frac{1}{2}\text{Ln}|2x-3x^2| + C$

(12) $\int \frac{2x^2}{x-3}dx = \int\left(2x+6-\frac{18}{x-3}\right)dx$

$= x^2 + 6x - 18\text{Ln}|x-3| + C$

└── En este caso, primero se divide. Esto se hace cuando el grado del polinomio numerador es mayor o igual al grado del denominador.

INTEGRAL DE UNA EXPONENCIAL

(8) $$\int a^\mu d\mu = \frac{a^\mu}{\text{Ln}\,a} + C$$

La integral de la exponencial a^μ *es la misma exponencial dividido por* $\text{Ln}\,a$*, siempre que exista el diferencial del exponente* μ.

Ejemplos:

(1) $I = \int 2^{3-2x}dx = \frac{1}{-2}\frac{2^{3-2x}}{\text{Ln}2} + C$

Pues: $\mu = 3 - 2x$

$\Rightarrow d\mu = (-2)\,dx$

└── **Falta**

(2)

$I = \int \operatorname{sen}3x\, 5^{3-4\cos 3x}dx = \frac{1}{12}\frac{5^{3-4\cos 3x}}{\text{Ln}5} + C$

$= \frac{1}{12\text{Ln}5}5^{3-4\cos 3x} + C$

Pues: $\mu = 3 - 4\cos 3x$

$\Rightarrow d\mu = (12)\operatorname{sen}3\,dx$

└── **Falta**

③ $I = \int e^{-2x} 7^{e^{-2x}} dx = \frac{1}{-2} \frac{7^{e^{-2x}}}{\text{Ln}7} + C$

$= -\frac{1}{2\,\text{Ln}7} 7^{e^{-2x}} + C$

Pues: $\mu = e^{-2x}$

$\Rightarrow \; d\mu = (-2) e^{-2x} dx$ — Falta

④ $I = \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$

Solución:

$$I = \int \frac{a^{2x} - 2a^x b^x + b^{2x}}{a^x b^x} dx$$

$$= \int \left(\frac{a^x}{b^x} - 2 + \frac{b^x}{a^x} \right) dx$$

$$= \int \left[\left(\frac{a}{b}\right)^x - 2 + \left(\frac{b}{a}\right)^x \right] dx$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\text{Ln}\left(\frac{a}{b}\right)} - 2x + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} + C$$

⑤ $I = \int \frac{a^{2x} - 1}{\sqrt{a^x}} dx = \int \left(\frac{a^{2x}}{a^{x/2}} - \frac{1}{a^{x/2}} \right) dx$

$= \int (a^{3/2\,x} - a^{-1/2\,x}) dx$

$= \frac{2}{3} \frac{a^{3/2\,x}}{\text{Ln}\,a} + 2 \frac{a^{-1/2\,x}}{\text{Ln}\,a} + C$

⑥ $I = \int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \frac{5^{\sqrt{x}}}{\text{Ln}\,5} + C$

Pues: $\mu = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; d\mu = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

⑦ $I = \int \frac{5b^{\text{arctg}\,x}}{1 + x^2}$

$\mu = \text{arctg}\,x$

$d\mu = \frac{1}{1 + x^2} dx$

Luego: $I = \frac{5}{\text{Ln}\,b} b^{\text{arctg}\,x} + C$

INTEGRAL DE UNA EXPONENCIAL SIMPLE

⑨ $\boxed{\int e^{\mu} d\mu = e^{\mu} + C}$ $\quad \mu = \mu(x)$

Se lee "La integral de una exponencial simple, es la misma exponencial, siempre y cuando exista la derivada del exponente"

Ejemplos:

① $I = \int e^{-t} dt = -e^{-t} + C$

② $I = \int y\, e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} e^{-y^2} + C$

Pues: $\mu = -y^2 \;\Rightarrow\; d\mu = (-2)\, y\, dy$ — Falta

(3) $I = \int \text{sen}\,2x\, e^{3-\cos 2x} dx = \frac{1}{2} e^{3-\cos 2x} + C$

Pues: $\mu = 3 - \cos 2x \Rightarrow d\mu = (2)\,\text{sen}\,2x\,dx$

Falta

(4) $I = \int \frac{e^{x} + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}} dx$

$= \int (e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x}) dx$

$= -\frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - e^{-x} + C$

(5) $I = \int e^{e^{x}} e^{x}\, dx = e^{e^{x}} + C$

Pues: $\mu = e^{x} \Rightarrow d\mu = e^{x} \cdot dx$

(6) $I = \int \frac{3\, e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 3 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$= 3\,(2)\, e^{\sqrt{x}} + C$

$= 6\, e^{\sqrt{x}} + C$

Pues $\mu = \sqrt{x} \Rightarrow d\mu = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Falta

(7) $I = \int x^{2}\, e^{-3x^{3}+2}\, dx$

$= -\frac{1}{9}\, e^{-3x^{2}+2} + C$

INTEGRAL DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

(10) $$\int \text{sen}\,\mu\, d\mu = -\cos\mu + C$$

La integral del $\text{sen}\,\mu$, es igual a menos coseno, siempre y cuando existe la derivada del arco μ.

***Ejemplos*:**

(1) $I = \int \text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

Pues el arco es: $\mu = 2x \Rightarrow d\mu = (2)\,dx$

Falta

(2) $I = \int x\,\text{sen}\,(3-2x^{2})dx = \frac{1}{4}\cos(3-2x^{2}) + C$

Pues el arco es:

$\mu = 3 - 2x^{2} \Rightarrow d\mu = -4x\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{-dx} d\mu$

(3) $I = \int 3x^{2}\,\text{sen}(4 - x^{3})dx = ?$

El arco es: $\mu = 4 - x^{3} \Rightarrow d\mu = -3x^{2}\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{-3x^{2}} d\mu$

Luego $I = \int 3x^{2}\,\text{sen}\,\mu \frac{1}{-3x^{2}} d\mu$

$= -\int \text{sen}\,\mu\, d\mu = -(-\cos\mu) + C$

$= \cos\mu + C$

$= \cos(4 - x^{3}) + C$

④ $I = \int e^{-2x}\,\text{sen}(5+e^{-2x})dx = \frac{1}{-2}(-\cos\mu)$

$\mu = 5+e^{-2x} \Rightarrow d\mu = -2e^{-2x}$

$= \frac{1}{2}\cos(5+e^{-2x})+C$

⑤ $I = \int \cos x\,\text{sen}\,(3-5\,\text{sen}\,x)\,dx = ?$

El arco es: $\mu = 3-5\,\text{sen}\,x$

$\Rightarrow \quad d\mu = (-5)\cos x\,dx$

Falta

Luego: $I = \frac{1}{-5}(-\cos(3-5\,\text{sen}\,x))+C$

$= \frac{1}{5}\cos(3-5\,\text{sen}\,x)+C$

⑥ $I = \int \frac{1}{x}\text{sen}(2-3\text{Ln}\,x)dx = \frac{1}{3}\cos(2-3\text{Ln}\,x)$

Donde: $\mu = 2-3\text{Ln}\,x$

$d\mu = -3\frac{1}{x}dx$

$dx = -\frac{x}{3}d\mu$

⑪ $\boxed{\int \cos\mu\,d\mu = \text{sen}\,\mu + C}$ $\quad \mu = \mu(x)$

La integral del $\cos\mu$, es igual a $\text{sen}\,\mu$, siempre y cuando existe la derivada del arco μ.

Ejemplos:

① $I = \int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\text{sen}\,5x + C$

El arco es: $\mu = 5x \quad \Rightarrow \quad d\mu = 5dx$

② $I = \int \cos 3\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\,Sen\,3\theta + C$

El arco es: $\mu = 3\theta \Rightarrow d\mu = 3d\theta$

③ $I = \int e^{-2x}\cos(3+e^{-2x})dx$

$= \frac{1}{-2}\text{sen}(3+e^{-2x})+C$

El arco es:

$\mu = 3+e^{-2x} \Rightarrow d\mu = -2e^{-2x}dx$

④ $I = \int \frac{2}{\sqrt{x}}\cos(1-3\sqrt{x})dx$

$= 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(1-3\sqrt{x})dx$

$= 2\left(-\frac{2}{3}\right)\text{sen}(1-3\sqrt{3})+C$

El arco es:

$\mu = 1-3\sqrt{x} \Rightarrow d\mu = -3\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$I = -\frac{4}{3}\text{sen}(1-3\sqrt{x})+C$

⑤ $I = \int \frac{1}{x}\cos(2-\frac{5}{3}\text{Ln}\,x)dx$

$= -\frac{3}{5}\,\text{sen}\left(2-\frac{5}{3}\text{Ln}\,x\right)+C$

El arco es:

$\mu = 2 - \frac{5}{3}\text{Ln}\,x \quad \Rightarrow \quad d\mu = -\frac{5}{3}\frac{1}{x}dx$

(6)

$I = \int x\cos(2-3x^2)dx = -\frac{1}{6}\,\text{sen}(2-3x^2)+C$

El arco es: $\mu = 2-3x^2 \;\Rightarrow\; d\mu = -6x\,dx$

(7)

$I = \int x^2\cos(1-x^3)dx = -\frac{1}{3}\text{sen}(1-x^3)+C$

El arco es: $\mu = 1-x^3 \;\Rightarrow\; d\mu = -3x^2dx$

(8) $I = \int \cos(2-\theta)d\theta = -\,\text{sen}(2-\theta)+C$

El arco es: $\mu = 2-\theta \;\Rightarrow\; d\mu = -d\theta$

(9) $I = \int \cos(2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta + C$

(10) $I = \int \cos(\pi\alpha)d\alpha = \frac{1}{\pi}\,\text{sen}(\pi\alpha)+C$

(12) $$\int \text{tg}\,\mu\;d\mu = \text{Ln}|\sec\mu| + C$$

La integral de la $\text{tg}\,\mu$ es igual al logaritmo natural de la $\sec\mu$, siempre y cuando existe la derivada del arco μ.

(1) $I = \int \text{tg}\,5\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\,\text{Ln}|\sec 5\theta| + C$

El arco es: $\mu = 5\theta \;\Rightarrow\; d\mu = 5\,d\theta$ — **Falta el 5**

(2) $I = \int \text{tg}\,3x\,dx = \frac{1}{3}\text{Ln}|\sec 3x| + C$

El arco es: $\mu = 3x \;\Rightarrow\; d\mu = 3dx$ — **Falta el 3**

$I = \int x\,\text{tg}(2-5x^2)dx$

$= -\frac{1}{10}\text{Ln}|\sec(2-5x^2)| + C$

El arco es: $\mu = 2-5x^2 \Rightarrow d\mu = -10x\,dx$

(4) $I = \int \frac{2}{\sqrt{x}}\text{tg}(3-5\sqrt{x})dx$

$= 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}5\,\text{tg}(3-5\sqrt{x})dx$

El arco es:

$\mu = 3-5\sqrt{x} \;\Rightarrow\; d\mu = -5\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

Luego:

$I = 2\left(-\frac{2}{5}\right)\text{Ln}|\sec(3-5\sqrt{x})| + C$

$I = -\frac{4}{5}\,\text{Ln}|\sec(3-5\sqrt{x})| + C$

(5) $I = \int \text{tg}(5-2\theta)d\theta$

$= -\frac{1}{2}\text{Ln}|\sec(5-2\theta)| + C$

El arco es:

$\mu = 5 - 2\theta \Rightarrow d\mu = -2d\theta$

└ **Falta el -2**

⑥ $I = \int \operatorname{sen} 2x \operatorname{tg}(1 - \cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|\sec(1 - \cos 2x)| + C$

El arco es:

$\mu = 1 - \cos 2x \Rightarrow d\mu = 2\operatorname{sen} 2x$

└ **Falta el 2**

⑦ $I = \int e^{-x} \operatorname{tg}(3 + 2e^{-x})dx$

$= -\frac{1}{2} \operatorname{Ln}|\sec(3 + 2e^{-x})| + C$

El arco es:

$\mu = 3 + 2e^{-x} \Rightarrow d\mu = -2e^{-x}dx$

⑧ $I = \int 2^x \operatorname{tg}(3 - 2^x)dx$

$= -\frac{1}{\operatorname{Ln} 2} \operatorname{Ln}|\sec(3 - 2^x)| + C$

El arco es:

$\mu = 3 - 2^x \Rightarrow d\mu = -2^x \operatorname{Ln} 2 dx$

⑬ $\int \operatorname{ctg} \mu \, d\mu = \operatorname{Ln}|\operatorname{sen} \mu| + C$

La integral de la $\operatorname{cotg} \mu$ es igual al logaritmo natural de $\operatorname{sen} \mu$, siempre y cuando existe la derivada del arco μ.

① $I = \int \operatorname{cotg} 6\theta \, d\theta = \frac{1}{6} \operatorname{Ln}|\operatorname{sen} 6\theta| + C$

El arco es: $\mu = 6\theta \Rightarrow d\mu = 6d\theta$

② $I = \int \operatorname{cotg}(2 - 3\theta)d\theta$

$= -\frac{1}{3} \operatorname{Ln}|\operatorname{sen}(2 - 3\theta)| + C$

El arco es: $\mu = 2 - 3\theta \Rightarrow d\mu = -3d\theta$

③ $I = \int \operatorname{cotg}(3 - \theta)d\theta$

$= -\operatorname{Ln}|\operatorname{sen}(3 - \theta)| + C$

El arco es: $\mu = 3 - \theta \Rightarrow d\mu = -1d\theta$

④ $I = \int \operatorname{cotg}(4x - 1)dx$

$= \frac{1}{4} \operatorname{Ln}|\operatorname{sen}(4x - 1)| + C$

El arco es: $\mu = 4x - 1 \Rightarrow d\mu = 4dx$

⑤ $I = \int x^2 \operatorname{cotg}(3 - 5x^3)dx$

$= -\frac{1}{15} \operatorname{Ln}|\operatorname{sen}(3 - 5x^3)| + C$

El arco es:

$\mu = 3 - 5x^3 \Rightarrow d\mu = -15x^2 dx$

(6) $I = \int x \cot g\, x^2 dx = \frac{1}{2} \text{Ln}|\text{sen}\, x^2| + C$

El arco es: $\mu = x^2 \Rightarrow d\mu = 2x\,dx$

(7) $I = \int \frac{1}{x} \cot g(3 - \text{Ln}\, 2x) dx$

$= -\text{Ln}|\text{sen}(3 - \text{Ln}\, 2x)| + C$

El arco es:

$\mu = 3 - \text{Ln}\, 2x \Rightarrow d\mu = -\frac{2}{2x} dx$

$= -\frac{1}{x} dx$

(8) $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-3x}} \cot g(3 + \sqrt{1-3x}) dx = ?$

El arco es:

$\mu = 3 + \sqrt{1-3x} \Rightarrow d\mu = \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}} dx$

Entonces:

$I = -\frac{2}{3} \text{Ln}|\text{sen}(3 + \sqrt{1-3x})| + C$

(9) $I = \int \cot g\, 3y\, dy = \frac{1}{3} \text{Ln}|\text{sen}\, 3y| + C$

El arco es:

$\mu = 3y \Rightarrow d\mu = 3dy$

(10) $I = \int \cot g(2\theta - 1) d\theta$

$= \frac{1}{2} \text{Ln}|\text{sen}(2\theta - 1)| + C$

El arco es:

$\mu = 2\theta - 1 \Rightarrow d\mu = 2d\theta$

(14) $\int \sec \mu\, d\mu = \text{Ln}|\sec \mu + \text{tg}\, \mu| + C$

(1) $I = \int \sec 3\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{3} \text{Ln}|\sec 3\theta + \text{tg}\, 3\theta| + C$

El arco es: $\mu = 2\theta \Rightarrow d\mu = 3d\theta$

(2) $I = \int \sec 5x\, dx$

$= \frac{1}{5} \text{Ln}|\sec 5x + \text{tg}\, 5x| + C$

El arco es: $\mu = 5x \Rightarrow d\mu = 5dx$

(3) $I = \int \sec 9y\, dy$

$= \frac{1}{9} \text{Ln}|\sec 9y + \text{tg}\, 9y| + C$

El arco es: $\mu = 9y \Rightarrow d\mu = 9dy$

(4) $I = \int \sec(1 - 2y) dy$

$= -\frac{1}{2} \text{Ln}|\sec(1-2y) + \text{tg}(1-2y)| + C$

El arco es:
$\mu = 1 - 2y \Rightarrow d\mu = -2dy$

(5) $I = \int \sec 2\theta \, d\theta$

$= \frac{1}{2} \text{Ln}|\sec 2\theta + \text{tg}\, 2\theta| + C$

El arco es: $\mu = 20 \Rightarrow d\mu = 2d\theta$

(6) Calcular: $I = \int \frac{\text{sen}\,\theta - 1}{\cos\theta} d\theta$

Pero: $I = \int \left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta} \right) d\theta$

$I = \int \text{tg}\,\theta \, d\theta - \int \sec\theta \, d\theta$

$I = \text{Ln}|\sec\theta| - \text{Ln}|\sec\theta + \text{tg}\,\theta| + C_1$

$I = \text{Ln}\left| \frac{c \cdot \sec\theta}{\sec\theta + \text{tg}\,\theta} \right|$, si $C_1 = \text{Ln}\, c$

(7) Hallar $I = \int \frac{\cos 2\theta - 3}{\cos 2\theta} d\theta$

Pero $I = \int \left(\frac{\cos 2\theta}{\cos 2\theta} - \frac{3}{\cos 2\theta} \right) d\theta$

$I = \int (1 - 3\sec 2\theta) d\theta$

$I = \int d\theta - 3 \int \sec 2\theta \, d\theta$

$I = \theta - 3\frac{1}{2} \text{Ln}|\sec 2\theta + \text{tg}\, 2\theta| + C$

(8) $I = \int \frac{\text{sen}\, 3\theta - \cos 3\theta}{\cos^2 3\theta} d\theta$

$= \int (\text{sen}\, 3\theta \cos^{-2} 3\theta - \sec 3\theta) d\theta$

$= -\frac{1}{3} \frac{\cos^{-1} 3\theta}{-1} - \frac{1}{3} \text{Ln}|\sec 3\theta + \text{tg}\, 3\theta| + C$

$= \frac{1}{3} \sec 3\theta - \frac{1}{3} \text{Ln}|\sec 3\theta + \text{tg}\, 3\theta| + C$

(9) $I = \int \frac{1}{x} \sec(2 - 3\,\text{Ln}\, x) dx$

$= -\frac{1}{3} \text{Ln}|\sec(2 - 3\text{Ln}\, x) + \text{tg}(2 - 3\text{Ln}\, x)| + C$

(15) $\boxed{\int \csc \mu \, d\mu = \text{Ln}|\csc \mu - c\,\text{tg}\, \mu| + C}$ $\mu = \mu(x)$

(1) $I = \int \csc 2\theta \, d\theta$

$= \frac{1}{2} \text{Ln}|\csc 2\theta - \text{ctg} 2\theta| + C$

El arco es: $\mu = 2\theta \Rightarrow d\mu = 2d\theta$

(2) $I = \int \csc 4\theta \, d\theta$

$= \frac{1}{4} \text{Ln}|\csc 4\theta - \text{ctg} 4\theta| + C$

El arco es: $\mu = 4\theta \Rightarrow d\mu = 4d\theta$

(3) $I = \int \csc\left(\frac{x}{a-b} \right) dx = ?$

El arco es:

$\mu = \frac{x}{a-b} \Rightarrow d\mu = \frac{1}{a-b} dx$

Entonces:

$I = (a-b)\text{Ln}\left| \csc\left(\frac{x}{a-b} \right) - \text{ctg}\left(\frac{x}{a-b} \right) \right| + C$

(4) $I = \int \frac{(\cos bx + \text{sen}\, bx)^2}{\text{sen}\, bx} dx = ?$

Pero:

$$I = \int \left(\frac{\cos^2 bx + \text{sen}^2 bx + 2\cos bx \,\text{sen}\, bx}{\text{sen}\, bx} \right) dx$$

$$I = \int \left(\frac{1 + 2\cos bx \,\text{sen}\, bx}{\text{sen}\, bx} \right) dx$$

$$I = \int \left(\frac{1}{\text{sen}\, bx} + 2\cos bx \right) dx$$

$$I = \int \csc bx \, dx + 2 \int \cos bx \, dx$$

$$= \tfrac{1}{b} \text{Ln}|\csc bx - \text{ctg}\, bx| + \tfrac{2}{b} \text{sen}\, bx + C$$

(5) $$I = \int \left(\frac{\text{sen}\, 3\theta - 3\,\text{sen}^3\, 3\theta \cos^2 3\theta}{\text{sen}^2\, 3\theta} \right) d\theta$$

Pero:

$$I = \int \left(\frac{\text{sen}\, 3\theta}{\text{sen}^2 3\theta} - \frac{3\,\text{sen}^3\, 3\theta \cos^2 3\theta}{\text{sen}^2\, 3\theta} \right) d\theta$$

$$I = \int \csc 3\theta \, d\theta - 3 \int \text{sen}\, 3\theta \cos^2 3\theta \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3} \text{Ln}|\csc 3\theta - c\,\text{tg}\, 3\theta| - 3\left(-\tfrac{1}{3}\right) \frac{\cos^3 3\theta}{3} + C$$

$$= \tfrac{1}{3} \text{Ln}|\csc 3\theta - c\,\text{tg}\, 3\theta| + \tfrac{1}{3} \cos^3 3\theta + C$$

(6) $$I = \int \left(\frac{5 - \cos 2x}{\text{sen}\, 2x} \right) dx .$$ Pero:

$$I = \int \left(\frac{5}{\text{sen}\, 2x} - \frac{\cos 2x}{\text{sen}\, 2x} \right) dx$$

$$I = \int (5\csc 2x - \text{ctg}\, 2x) dx$$

$$= \tfrac{5}{2} \text{Ln}|\csc 2x - \text{ctg}\, 2x| - \tfrac{1}{2} \text{Ln}|\text{sen}\, 2x| + C$$

(7) $$I = \int \csc(n\pi\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{n\pi} \text{Ln}|\csc(n\pi\theta) - \text{ctg}(n\pi\theta)| + C$$

(16) $$\boxed{\int \sec^2 \mu \, d\mu = \text{tg}\, \mu + C} \quad \mu = \mu(x)$$

(1) $$I = \int \sec^2 5\theta \, d\mu = \tfrac{1}{5} \text{tg}\, 5\theta + C$$

El arco es:

$$\mu = 5\theta \implies d\mu = 5d\theta$$

(2) $$I = \int \sec^2 (1 - 3\theta) d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{3} \text{tg}(1 - 3\theta) + C$$

El arco es:

$$\mu = 1 - 3\theta \implies d\mu = -3\,d\theta$$

(3) $$I = \int \frac{1 + 2\cos 3\theta}{\cos^2 3\theta} d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 3\theta} + \frac{2\cos 3\theta}{\cos^2 3\theta} \right) d\theta$$

$$= \int (\sec^2 3\theta + 2\sec 3\theta) d\theta$$

Integrando:

$$I = \tfrac{1}{3} \text{tg}\, 3\theta + 2\, \tfrac{1}{3} \text{Ln}|\sec 3\theta + \text{tg}\, 3\theta| + C$$

④ $$\int \frac{4}{\cos^2 3x}dx = 4\int \frac{1}{\cos^2 3x}dx$$
$$= 4\int \sec^2 3x\,dx$$
$$= 4\,\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,3x + C$$
$$= \tfrac{4}{3}\,\mathrm{tg}\,3x + C$$

El arco es: $\mu = 3x \Rightarrow d\mu = 3dx$

⑤ $$I = \int x^2 \sec^2(3-2x^3)dx$$
$$= -\tfrac{1}{6}\,\mathrm{tg}(3-2x^3) + C$$

El arco es:

$\mu = 3-2x^3 \Rightarrow d\mu = -6x^2dx$

⑥ $$I = \int e^{-2x}\sec^2(5+3e^{-2x})dx$$
$$= -\tfrac{1}{6}\,\mathrm{tg}(5+3e^{-2x}) + C$$

El arco es:

$\mu = 5+3e^{-2x} \Rightarrow d\mu = -6e^{-2x}dx$

⑦ $$I = \int (1+\mathrm{tg}\,2x)^2\,dx$$
$$= \int (1+\mathrm{tg}^2 2x + 2\,\mathrm{tg}\,2x)dx$$
$$= \int (\sec^2 2x + 2\,\mathrm{tg}\,2x)dx$$
$$I = \int \sec^2 2x\,dx + 2\int \mathrm{tg}\,2x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,2x + 2\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Ln}|\sec 2x| + C$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,2x + \mathrm{Ln}|\sec 2x| + C$$

⑧ $$I = \int \frac{5x}{3-3\,\mathrm{sen}^2(1-x^2)}dx$$
$$= \int \frac{5x}{3(1-\mathrm{sen}^2)(1-x^2))}dx$$
$$= \frac{5}{3}\int \frac{x}{\cos^2(1-x^2)}dx$$
$$= \frac{5}{3}\int x\sec^2(1-x^2)dx$$
$$= -\frac{5}{6}\,\mathrm{tg}(1-x^2) + C$$

⑰ $$\boxed{\int \csc^2\mu\,d\mu = -\mathrm{ctg}\,\mu + C} \qquad \mu = \mu(x)$$

① $$I = \int \csc^2 ax\,dx = -\tfrac{1}{a}\,\mathrm{ctg}\,ax + C$$

El arco es:

$\mu = ax \Rightarrow d\mu = a\,dx$

② $$I = \int \csc^2(a-bx)dx$$
$$= -\tfrac{1}{b}(-\mathrm{ctg}(a-bx)) + C$$
$$= \tfrac{1}{b}\,\mathrm{ctg}(a-bx) + C$$

El arco es:

$\mu = a-bx \Rightarrow d\mu = -b\,dx$

③ $I = \int \frac{5x}{\operatorname{sen}^2 x^2} dx = 5 \int x \csc^2 x^2$

$= 5 \frac{1}{2} (-\operatorname{ctg} x^2) + C$

$= -\frac{5}{2} \operatorname{ctg} x^2 + C$

El arco es: $\mu = x^2 \Rightarrow d\mu = 2x\,dx$

④ $I = \int \frac{1}{x \operatorname{sen}^2 (3 \operatorname{Ln} x)} dx$

$= \int \frac{1}{x} \csc^2 (3 \operatorname{Ln} x) dx$

El arco es:

$\mu = 3 \operatorname{Ln} x \Rightarrow d\mu = 3 \frac{1}{x} dx$

Luego: $I = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(3 \operatorname{Ln} x) + C$

⑤ $I = \int \csc^2 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2\theta + C$

El arco es:

$\mu = 2\theta \Rightarrow d\mu = 2 d\theta$

⑥ $I = \int 8\theta^2 \csc^2 (1 - 3\theta^3) d\theta = ?$

Pero:

$I = 8 \int \theta^2 \csc^2 (1 - 3\theta^3) d\theta = ?$

El arco es:

$\mu = 1 - 3\theta^3 \Rightarrow d\mu = -9\theta^2 d\theta$

Luego: $I = -\frac{8}{9} \operatorname{ctg}(1 - 3\theta^3) + C$

⑦ $I = \int (x-1) \csc^2 (2x - x^2) dx = ?$

El arco es:

$\mu = 2x - x^2 \Rightarrow d\mu = (2 - 2x) dx$

$= -2(x-1) dx$

Luego: $I = -\frac{1}{2}(-\operatorname{ctg}(2x - x^2)) + C$

$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(2x - x^2) + C$

⑧ $I = \int \frac{1}{\sqrt{5-3x}} \csc^2 (3 - \sqrt{5-3x}) dx = ?$

El arco es:

$\mu = 3 - \sqrt{5-3x} \Rightarrow d\mu = -\frac{-3}{2\sqrt{5-3x}} dx$

$= \frac{3}{2\sqrt{5-3x}} dx$

$\Rightarrow I = -\frac{2}{3} \operatorname{ctg}(3 - \sqrt{5-3x}) + C$

⑨ $I = \int \frac{1}{2} \csc^2 (\pi\theta) d\theta$

El arco es: $\mu = \pi\theta$

$d\mu = \pi\, d\theta$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg}(\pi\theta) + C$

⑩ $I = \int \csc^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$

$= -2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + C$

(18) $$\int \sec \mu \operatorname{tg} \mu \, d\mu = \sec \mu + C \qquad \mu = \mu(x)$$

(1) $I = \int \sec 2x \operatorname{tg} 2x \, dx = \frac{1}{2} \sec 2x + C$

El arco es: $\mu = 2x \Rightarrow d\mu = 2dx$

(2) $I = \int \sec(a - bx) \operatorname{tg}(a - bx) dx$

$= -\frac{1}{b} \sec(a - bx)$

El arco es:

$\mu = a - bx \Rightarrow d\mu = -b\,dx$

(3) $I = \int \sec 3\theta \operatorname{tg} 3\theta \, d\theta = \frac{1}{3} \sec 3\theta + C$

El arco es: $\mu = 3\theta \Rightarrow d\mu = 3d\theta$

(4) $I = \int \frac{1 + \operatorname{sen} 3x}{\cos^2 3x} dx$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 3x} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^2 3x} \right) dx$

$= \int \left(\sec^2 3x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} \frac{1}{\cos 3x} \right) dx$

$= \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + \int \operatorname{tg} 3x \sec 3x \, dx$

$= \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{3} \sec 3x + C$

(5) $I = \int x^4 \sec(3x - x^5) \operatorname{tg}(3 - x^5) dx$

$= -\frac{1}{5} \sec(3 - x^5) + C$

El arco es:

$\mu = 3 - x^5 \Rightarrow d\mu = -5x^4 dx$

(6) $I = \int \frac{5}{e^{3x}} \sec(2 + e^{-3x}) tg(2 + e^{-3x}) dx = ?$

El arco es:

$\mu = 2 + e^{-3x} \Rightarrow d\mu = -3e^{-3x} dx$

Pero:

$I = 5 \int e^{-3x} \sec(2 + e^{-3x}) \operatorname{tg}(2 + e^{-3x}) dx$

$= -\frac{5}{3} \sec(2 + e^{-3x}) + C$

(7) $I = \int \operatorname{tg} 5\theta \sec 5\theta \, d\theta$

(8) $I = \int \sec bx \operatorname{tg} bx \, dx$

(9) $I = \int x \frac{\operatorname{sen}(1 - 4x^2)}{\cos^2(1 - 4x^2)} dx$

(10)

$I = \int \frac{1}{x-1} \sec(3 + \operatorname{Ln}(1-x)) \operatorname{tg}(3 + \operatorname{Ln}(1-x)) dx$

(11)

$I = \int \frac{5}{\sqrt{3-x}} \sec(2 + \sqrt{3-x}) \operatorname{tg}(2 + \sqrt{3-x}) dx$

(19) $\boxed{\int \csc \mu \operatorname{cotg} \mu \, d\mu = -\csc \mu + C} \quad \mu = \mu(x)$

(1) $I = \int \csc 5\theta \operatorname{cotg} 5\theta \, d\theta = -\frac{1}{5}\csc 5\theta + C$

El arco es: $\mu = 5\theta \Rightarrow d\mu = 5d\theta$

(2) $I = \int \csc 7\theta \operatorname{cotg} 7\theta \, d\theta = -\frac{1}{7}\csc 7\theta + C$

El arco es: $\mu = 7\theta \Rightarrow d\mu = 7d\theta$

(3) $I = \int x^2 \frac{\cos(1-2x^3)}{\operatorname{sen}^2(1-2x^3)} dx = ?$

$I = \int x^2 \frac{\cos(1-2x^3)}{\operatorname{sen}(1-2x^3)} \frac{1}{\operatorname{sen}(1-2x^3)} dx$

$= \int x^2 \operatorname{cotg}(1-2x^3) \csc(1-2x^3) dx$

El arco es:

$\mu = 1-2x^3 \Rightarrow d\mu = -6x^2 dx$

Luego: $I = -\frac{1}{6}(-\csc(1-2x^3))$

$= \frac{1}{6}\csc(1-2x^3) + C$

(4) $I = \int a^x \csc(3-a^x) \operatorname{cotg}(3-a^x) dx = ?$

El arco es: $\mu = 3 - a^x \Rightarrow d\mu = -a^x \operatorname{Ln} a$

Luego: $I = -\frac{1}{\operatorname{Ln} a}(-\csc(3-a^x))$

$= \frac{1}{\operatorname{Ln} a}\csc(3-a^x) + C$

(5) $I = \int 2^{3x} \csc(1-2^{3x}) \operatorname{cotg}(1-2^{3x}) dx$

(6) $I = \int \csc 2\theta \operatorname{cotg} 2\theta \, d\theta$

(7) $I = \int \csc(-20x) \operatorname{cotg}(-20x) dx$

(8) $I = \int \frac{1}{x}\csc(3-2\operatorname{Ln} x) \operatorname{cotg}(3-2\operatorname{Ln} x) dx$

(9) $I = \int \csc\left(-\frac{2}{3}\theta\right) \operatorname{cotg}\left(-\frac{2}{3}\theta\right) d\theta$

(10) $I = \int \csc(-5\theta) \operatorname{cotg}(-5\theta) d\theta$

(11) $I = \int \csc\left(\frac{5}{3}\theta\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{5}{3}\theta\right) d\theta$

(12) $I = \int \frac{1}{x^2}\csc\left(3-\frac{1}{x}\right) \operatorname{cotg}\left(3-\frac{1}{x}\right) dx$

(13) $I = \int \csc \pi x \operatorname{cotg} x \, dx$

(14) $I = \int 5^{2x} \csc 5^{2x} \operatorname{cotg} 5^{2x} dx$

(20) $$\int \frac{d\mu}{\mu^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\mu}{a} + C \qquad \mu = \mu(x)$$

(1) $$I = \int \frac{dx}{5x^2+2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{5}x)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$\mu = \sqrt{5}\,x \Rightarrow d\mu = \sqrt{5}\,dx$$

Luego $$I = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{2}} + C$$

(2) $$I = \int \frac{dx}{4x^2+9}$$

$$= \int \frac{dx}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}\right)$$

$$\mu = 2x \Rightarrow d\mu = 2dx$$

$$I = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C$$

(3) $$\int \frac{x}{x^4+16}dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+4^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + C$$

$$\mu = x^2 \Rightarrow d\mu = 2x\,dx$$

(4) $$I = \int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+16}$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C$$

Completar cuadrados en el denominador:

$$x^2+4x+20 = x^2+4x+4-4+20$$
$$= (x+2)^2+16$$

(5) $$I = \int \frac{x+5}{x^2-6x+34}dx$$

Probar ¿qué pasa al derivar el denominador?

Si $\mu = x^2-6x+34$

$\Rightarrow d\mu = (2x-6)dx$

Como el numerador no es $2x-6$, hacer un arreglo algebraico para que lo sea y así poder integrar.

Multiplicar y dividir por 2:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+5)}{x^2-6x+34}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2-6x+34}$$

Restar y sumar -6 en el numerador:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-6+\overbrace{6+10}}{x^2-6x+34}dx$$

Separar en la suma de dos integrales:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+34}dx + \frac{1}{2}\int \frac{16}{x^2-6x+34}dx$$

$$= \frac{1}{2}\text{Ln}|x^2-6x+34| + \frac{16}{2}\int \frac{1}{x^2-6x+9-9+34}dx$$

$$= \frac{1}{2}\text{Ln}|x^2-6x+34| + 8\int \frac{1}{(x-3)^2+25}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\text{Ln}|x^2-6x+34| + 8\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{5} + C$$

(6) $$I = \int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-6e^{2x}+14}dx$$

Completar cuadrados en el denominador:

$$= \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 6e^{2x} + 9 - 9 + 14} dx$$

$$= \int \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 3)^2 + 5} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{e^{2x} - 3}{\sqrt{5}} \right) + C$$

donde: $\mu = e^{2x} - 3 \Rightarrow d\mu = 2e^{2x}dx$

(7) $I = \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 2x + 4} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 2x + 4} dx$

Pues: $2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{(\cos 2x)^2 + 4} dx$$

donde: $\mu = \cos 2x \Rightarrow d\mu = -2\operatorname{sen} x\, dx$

$$I = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\cos 2x}{2} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{\cos 2x}{2} + C$$

(8) $I = \int \frac{x - 4}{x^2 + 16} dx$

La derivada del denominador es: $2x$

Se debe multiplicar y dividir por 2, así:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 8}{x^2 + 16} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 16} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-8}{x^2 + 16} dx$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|x^2 + 16| + \frac{-8}{2}\,\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(x^2 + 16) - \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C$$

(9) $I = \int \frac{x}{9x^2 - 6x + 10} dx$

Derivar el denominador: $18x - 6$. Multiplicar y dividir por 18, luego sumar y restar 6.

$$= \frac{1}{18} \int \frac{18x - 6 + 6}{9x^2 - 6x + 10} dx$$

$$= \frac{1}{18} \int \frac{18x - 6}{9x^2 - 6x + 10} dx + \frac{1}{18} \int \frac{6}{9x^2 - 6x + 10} dx$$

$$= \frac{1}{18} \operatorname{Ln}|9x^2 - 6x + 10| + \frac{6}{18} \int \frac{1}{\underbrace{9x^2 - 6x + 1 + 9}_{(3x-1)^2 + 9}} dx$$

$$= \frac{1}{18} \operatorname{Ln}|9x^2 - 6x + 9| + \frac{1}{27} \operatorname{arctg} \frac{3x - 1}{3} + C$$

$$(21) \quad \boxed{\int \frac{d\mu}{\mu^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{Ln}\left| \frac{\mu - a}{\mu + a} \right| + C} \quad \mu = \mu(x)$$

(1) $I = \int \frac{dx}{x^2 - 25} = \frac{1}{2(5)} \operatorname{Ln}\left| \frac{x - 5}{x + 5} \right| + C$

$$= \frac{1}{10} \operatorname{Ln}\left| \frac{x - 5}{x + 5} \right| + C$$

(2) $I = \int \frac{dx}{3x^2 - 5} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{5})^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{Ln}\left| \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{5}}{\sqrt{3}x + \sqrt{5}} \right|$$

Donde:

$$\mu = \sqrt{3}\,x \Rightarrow d\mu = \sqrt{3}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{15}} \operatorname{Ln}\left|\frac{\sqrt{3}x - \sqrt{5}}{\sqrt{3}x + \sqrt{5}}\right| + C$$

(3) $$I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 7} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Ln}\left|\frac{x - 3 - \sqrt{2}}{x - 3 + \sqrt{2}}\right|$$

Previamente hemos completado cuadrados en el denominador:

$$x^2 - 6x + 7 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 7$$
$$= (x-3)^2 - 2$$

(4) $$I = \int \frac{dx}{3x^2 - 2x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}x}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}}$$

Previamente completar cuadrados en el denominador:

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$$

$$I = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)} \operatorname{Ln}\left|\frac{x - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{3x - 2}{3x}\right| + C$$

(5) $$I = \int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^2 3x - 2\cos 3x - 3}\,dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} 3x}{(\cos 3x - 1)^2 - 4}\,dx$$

completar cuadrados en el denominador:
$\cos^2 3x - 2\cos 3x + 1 - 1 - 3 = (\cos 3x - 1)^2 - 4$

Ahora tenemos: $\mu = \cos 3x - 1$

$d\mu = -3\operatorname{sen} 3x\,dx$

Luego la integral será:

$$I = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{2(2)} \operatorname{Ln}\left|\frac{\cos 3x - 1 - 2}{\cos 3x - 1 + 2}\right| + C$$

$$= \frac{-1}{12}\operatorname{Ln}\left|\frac{\cos 3x - 3}{\cos 3x + 1}\right| + C$$

(6) $$I = \int \frac{x}{x^2 - 5x + 3}\,dx = ?$$

Al derivar el denominador obtenemos:

$$2x - 5$$

Para poder integrar, hacer dos operaciones:

1ro multiplicar y dividir por 2

2do restar y sumar 5:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x - 5 + 5}{x^2 - 5x + 3}\,dx$$

Separar en la suma de dos integrales:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-5}{x^2 - 5x + 3}dx + \frac{1}{2}\int \frac{5}{x^2 - 5x + 3}dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x^2 - 5x + 3| + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 3}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x^2 - 5x + 3| + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x^2 - 5x + 3| + \frac{5}{2}\,\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)}\operatorname{Ln}\left|\frac{x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}}\right|$$

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x^2 - 5x + 3| + \frac{5}{2\sqrt{13}}\operatorname{Ln}\left|\frac{2x - 5 - \sqrt{13}}{2x - 5 + \sqrt{13}}\right|$$

(7) $$I = \int \frac{x - 3}{5x^2 - 10x}\,dx$$

(8) $$I = \int \frac{e^{3x}}{e^{6x} - 4e^{3x} + 3}\,dx$$

(9) $I = \int \frac{dx}{x(\text{Ln}^2 x - 2\text{Ln}\,x - 3)}$

(10) $I = \int \frac{dx}{(4x-1)^2 - 36}$

(11) $I = \int \frac{x^2}{x^6 - 4x^3 - 5} dx$

(12) $I = \int \frac{5}{x^2 + 6x + 7} dx$

(13) $I = \int \frac{\sec^2 3x}{\text{tg}^2 3x - 6\,\text{tg}\,3x - 55} dx$

(14) $I = \int \frac{x\,dx}{-2 - 8x^2 + 16x^4}$

(22) $\int \frac{d\mu}{a^2 - \mu^2} = \frac{1}{2a}\text{Ln}\left|\frac{a+\mu}{a-\mu}\right| + C \quad \mu = \mu(x)$

(1) $I = \int \frac{dx}{9 - x^2} = \frac{1}{2(3)}\text{Ln}\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$

$= \frac{1}{6}\text{Ln}\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$

(2) $I = \int \frac{dx}{3 - 2x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}\,x)^2}$

Donde: $\mu = \sqrt{2}\,x \Rightarrow d\mu = \sqrt{2}\,dx$

Luego: $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,x}\right| + C$

$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,x}\right| + C$

(3) $I = \int \frac{dx}{16 - (5x-1)^2}$

$= \frac{1}{5}\frac{1}{2(4)}\text{Ln}\left|\frac{4+5x-1}{4-(5x-1)}\right| + C$

Donde: $\mu = 5x - 1 \Rightarrow d\mu = 5dx$

Luego: $I = \frac{1}{40}\text{Ln}\left|\frac{5x+3}{5-5x}\right| + C$

(4) $I = \int \frac{dy}{36 - 16y^2} = \int \frac{dy}{36 - (4y)^2}$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{2(6)}\text{Ln}\left|\frac{6+4y}{6-4y}\right|$

Donde: $\mu = 4y \Rightarrow d\mu = 4dy$

Luego: $I = \frac{1}{48}\text{Ln}\left|\frac{6+4y}{6-4y}\right| + C$

(5) $I = \int \frac{5dx}{2 + 2x - x^2} = 5\int \frac{dx}{3 - (x-1)^2}$

Previamente, completar cuadrados en el denominador:

$2 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 2$

$= -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 2$

$= 3 - (x-1)^2$

Luego: $I = 5\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{3}+x-1}{\sqrt{3}-x+1}\right| + C$

(6) $I = \int \frac{x}{24 + 2x^2 - x^4} dx$

$= \int \frac{x}{25 - (x^2-1)^2} dx$

Previamente, completar cuadrados en el denominador

$$24-2x^2-x^4=-(x^4-2x^2+\ldots)+24$$
$$=-(x^4-2x^2+1-1)+24$$
$$=-(x^4-2x^2+1)+1+24$$
$$=-(x^2-1)^2+25$$

Donde: $\mu=x^2-1 \Rightarrow d\mu=2x\,dx$

Luego: $I=\frac{1}{2}\frac{1}{2(5)}\text{Ln}\left|\frac{5+(x^2-1)}{5-(x^2-1)}\right|+C$

$$=\frac{1}{20}\text{Ln}\left|\frac{4+x^2}{6-x^2}\right|+C$$

(7) $I=\int\frac{2x-3}{11-4x^2}dx$

$$=\int\frac{2x}{11-4x^2}dx+\int\frac{-3}{11-4x^2}$$

$$=2\int\frac{x}{\underbrace{11-4x^2}_{-8x}}dx-3\int\frac{dx}{11-4x^2}$$

$$=2\frac{1}{-8}\text{Ln}|11-4x^2|-3\int\frac{dx}{(\sqrt{11})^2-(2x)^2}$$

$\mu=2x$

$\Rightarrow d\mu=2dx$

$$I=-\frac{1}{4}\text{Ln}|11-4x^2|$$
$$-3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{11}}\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{11}+2x}{\sqrt{11}-2x}\right|\right)+C$$
$$=-\frac{1}{4}\text{Ln}|11-4x^2|-\frac{3}{4\sqrt{11}}\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{11}+2x}{\sqrt{11}-2x}\right|+$$

(8) $I=\int\frac{dx}{45-20x-25x^2}$

(9) $I=\int\frac{e^{2x}}{5-e^{4x}}dx$

(10) $I=\int\frac{\cos 3x}{4-\text{sen}^2 3x}dx$

(11) $I=\int\frac{\text{sen}2x}{16+6\cos 2x-\cos^2 2x}dx$

(12) $I=\int\frac{dx}{42x-49x^2-5}$

(13) $I=\int\frac{dx}{4+6x-x^2}$

(14) $I=\int\frac{\sec^2 5x}{4\,\text{tg}\,5x-\text{tg}^2\,5x-3}dx$

(23) $\int \sqrt{\mu^2 + a^2}\, d\mu = \frac{1}{2}\mu\sqrt{\mu^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Ln}|\mu + \sqrt{\mu^2 + a^2}| + C$ $\quad \mu = \mu(x)$

C

(1) $I = \int \sqrt{x^2 + 9}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{2} 9\operatorname{Ln}|x + \sqrt{x^2 + 9}|$

(2) $I = \int \sqrt{(2x+3)^2 + 16}\, dx$ donde $\mu = 2x + 3$

$d\mu = 2dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2x+3)\sqrt{(2x+3)^2 + 16} + \frac{1}{2}16 \operatorname{Ln}|(2x+3) + \sqrt{(2x+3)^2 + 16}| \right]$

$I = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{(2x+3)^2 + 16} + 4 \operatorname{Ln}|2x + 3 + \sqrt{(2x+3)^2 + 16}| + C$

(3) $I = \int \sqrt{x^2 - 2x + 5}\, dx = ?$ Completar cuadrados en la subradical:

$x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 - 1 + 5$

$= (x-1)^2 + 4$

$I = \int \sqrt{(x-1)^2 + 4}\, dx$

$= \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 4} + \frac{1}{2}4\operatorname{Ln}|x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 4}| + C$

(4) $I = \int x\sqrt{x^4 - 6x^2 + 34}\, dx$

$= \int x\sqrt{x^4 - 6x^2 + 9 - 9 + 34}\, dx$

$= \int x\sqrt{(x^2 - 3)^2 + 25}\, dx$. Hacer $\mu = x^2 + 3 \Rightarrow d\mu = 2x\,dx$

$dx = \frac{1}{2x} d\mu$

$= \int x\sqrt{\mu^2 + 25}\,\frac{1}{2x} d\mu$

$= \frac{1}{2} \int \sqrt{\mu^2 + 25}\, d\mu$

$$I = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\mu\sqrt{\mu^2+25} + \tfrac{1}{2}25\,\text{Ln}|\mu + \sqrt{\mu^2+25}|\right] + C$$

$$I = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(x^2-3)\sqrt{(x^2-3)^2+25} + \tfrac{25}{2}\,\text{Ln}|x^2-3+\sqrt{(x^2-3)^2+25}|\right] + C$$

(5) $I = \int\sqrt{30-10x+x^2}\,dx$ Completar cuadrados en la subradical:

$$= \int\sqrt{x^2-10x+25-25+30}\,dx$$

$$= \int\sqrt{(x-5)^2+5}\,dx$$ Ahora, integramos:

$$I = \tfrac{1}{2}(x-5)\sqrt{(x-5)^2+5} + \tfrac{1}{2}5\,\text{Ln}|x-5+\sqrt{(x-5)^2+5}| + C$$

Hallar las siguientes integrales, completando cuadrados previamente:

(6) $I = \int\sqrt{x^2+6x+109}\,dx$

(7) $I = \int\sqrt{25x^2-20x+13}\,dx$

(8) $I = \int\sqrt{113-14x+x^2}\,dx$

(9) $I = \int\sqrt{x^2-6x+10}\,dx$

(10) $I = \int\sqrt{18-8x+x^2}\,dx$

(11) $I = \int\sqrt{36x^2-60x+29}\,dx$

(12) $I = \int\sqrt{x^2+2x+65}\,dx$

(13) $I = \int e^{-x}\sqrt{e^{-2x}+4e^{-x}+8}\,dx$

(14) $I = \int \text{sen}\,3x\sqrt{\cos^2 3x-2\cos 3x+5}\,dx$

(15) $I = \int\frac{1}{x}\sqrt{9\,\text{Ln}^2x-6\,\text{Ln}\,x+10}\,dx$

(16) $I = \int 2^x\sqrt{2^{2x}-2^{x+1}+2}\,dx$

(17) $I = \int\sqrt{x^2+14x+58}\,dx$

(18) $I = \int \text{sen}\,x\cos x\sqrt{\cos^2 2x+6\cos 2x+25}\,dx$

(19) $I = \int\sqrt{a^2x^2-2abx+5b^2}\,dx$

(24)— J ^ju2 - a2 dju ~ -pi^pi2 - a2 -™-a2 Ln |// + sjpi² a²

11 1 = F Vx^ -1 6 d x ~jx\jx2 16Ln | x + ^ x 2 —16 j + C

x V x 2 - 1 6 -8 L n | x + V x 2 —16 1+ C

O í= j ^ ^ tiene ju = 3x - 2 => d// = 3dx

1 1 / 3 1 2 (3 x - 2) V (3 x - 2) - 4 - Í4 L n | 3 x - 2 + V (3 x - 2) 2 - 4 |) + C

(T) / = j* V x 2 - 4 x - 5 dx – ? Completar cuadrados en la subradicaí:

(x - 2) - 9 dx . donde: // = x - 2 d/u =dx

Ahora, integremos:

/ =1(x - 2)V{x--2)2 - 9 - -Í9 Ln|x - 2 +■^/Ü - 2)2 - 9 1+ C

J = j* a2x Va4x - 2a2x - 1 5 dx = ? , completar cuadrados en la subradicaí.

= j a 2x^ a4x - 2a2x +1 - 1 - 1 5 dx

J a 2x yj(a2* "~1)2 - 1 6 dx , donde ju = a2x - 1

dpi = a2x2 Ln 2 dx

Al integrar obtenemos:

$$I=\frac{1}{2\text{Ln}\,a}\left(\frac{1}{2}(a^{2x}-1)\sqrt{(a^{2x}-1)^2-16}-8\,\text{Ln}\left|a^{2x}-1+\sqrt{(a^{2x}-1)^2-16}\right|\right)+C$$

Hallar las siguientes integrales, completando cuadrados, si lo requiere el caso:

(5) $\int\sqrt{x^2-9}\,dx$

(6) $\int\sqrt{x^2-5}\,dx$

(7) $\int x\sqrt{9x^4-12x^2-6}\,dx$

(8) $\int\sqrt{4x^2-12x+5}\,dx$

(9) $\int\sqrt{x^2+10x-39}\,dx$

(10) $\int\sqrt{x^2+16x+63}\,dx$

(11) $\int\sec 3x\,\text{tg}\,3x\sqrt{\sec^2 3x-25}\,dx$

(12) $\int\sec^2 5x\sqrt{\text{tg}^2\,5x-4}\,dx$

(13) $\int\sqrt{t^2-25}\,dt$

(14) $\int\sqrt{4t^2-1}\,dt$

(15) $\int\sqrt{5t^2-3}\,dt$

(16) $\int\sqrt{t^2-3t}\,dt$

(17) $\int\sqrt{t^2-6t}\,dt$

(18) $\int\sqrt{t^2+14t+45}\,dt$

(19) $\int\text{sen}\,2\theta\sqrt{\cos^2 2\theta-3}\,dx$

(20) $\int\cos 3\theta\sqrt{\text{sen}^2\,3\theta-4}\,d\theta$

(25) $$\boxed{\int \sqrt{a^2-\mu^2}\,d\mu = \frac{1}{2}\mu\sqrt{a^2-\mu^2}+\frac{1}{2}a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{\mu}{a}+c} \quad \mu=\mu(x)$$

(1) $$I=\int\sqrt{25-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}+\frac{1}{2}25\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{5}+C$$

(2) $$\int_o^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+\frac{1}{2}r^2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{r}\Big]_o^r$$

$$=\Big[\underbrace{\frac{1}{2}r\sqrt{r^2-r^2}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{2}r^2\operatorname{arc\,sen}\frac{r}{r}}_{\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\Big]-\Big[\underbrace{\frac{1}{2}(0)\sqrt{r^2-0}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{2}r^2\operatorname{arc\,sen}\frac{o}{r}}_{\frac{1}{2}r^2(0)}\Big]$$

$$=\frac{1}{4}\pi r^2$$

$$=\frac{1}{4}\pi r^2 \qquad \text{pues: } \operatorname{arc\,sen}(1)=\frac{\pi}{2}$$

(3) $$I=\int\sqrt{16-(x-3)^2}\,dx=\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{16-(x-3)^2}+\frac{1}{2}16\,arc\ sen\,\frac{x-3}{4}+C$$

(4) $I=\int\sqrt{30x-9x^2-21}\,dx=?$. Completar cuadrados en la subradical:

$$\begin{aligned}30x-9x^2-21&=-(9x^2-30x+\ldots)-21\\&=(9x^2-30x+25-25)-21\\&=-(9x^2-30x+25)+25-21\\&=-(3x-5)^2+4\end{aligned}$$

o sea:

$$\begin{aligned}I=\int\sqrt{4-(3x-5)^2}\,dx&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(3x-5)\sqrt{4-(3x-5)^2}+\frac{1}{2}4\operatorname{arc\,sen}\frac{3x-5}{2}\right]+C\\&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(3x-5)\sqrt{4-(3x-5)^2}+2\operatorname{arc\,sen}\frac{3x-5}{2}\right]+C\end{aligned}$$

Pues: $\mu=3x-5 \quad\Rightarrow\quad d\mu=3\,dx$

Completando cuadrados, hallar las siguientes integrales:

(5) $\int\sqrt{5-x^2+4x}\,dx$

(6) $\int\sqrt{-x^2-14x-46}\,dx$

(7) $\int\sqrt{45-49x^2+28x}\,dx$

(8) $\int\sqrt{-x^2-10x-24}\,dx$

(9) $\int\sqrt{-x^2+0\cdot 6x-0\cdot 05}\,dx$

(10) $\int\sqrt{-9x^2+12x}\,dx$

(11) $\int\sqrt{-25x^2+10\sqrt{2}\,x}\,dx$

(12) $\int\sqrt{-36x^2+34x}\,dx$

(13) $\int x\sqrt{5-9x^4+12x^2}\,dx$

(14) $\int\sqrt{80-4x^2+4x}\,dx$

(15) $\int\sqrt{135-25x^2+30x}\,dx$

(16) $\int\frac{1}{x}\sqrt{3-9\,L^2nx+6Lnx}\,dx$

(26) $\boxed{\int\frac{d\mu}{\sqrt{a^2-\mu^2}}=\operatorname{arc\,sen}\frac{\mu}{a}+c}$ $\quad\mu=\mu(x)$

(1) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+c$

(2) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}\,x)^2}}$

$\mu=\sqrt{3}\,x$

$d\mu=\sqrt{3}\,dx$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{5}}+C$

(3) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(2x-1)^2}}=\frac{1}{2}\,arc\ sen\ \frac{2x-1}{3}+C$

Donde: $\mu=2x-1\ \Rightarrow\ d\mu=2dx$

(4) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-7}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+4)^2}}$

Completar cuadrados en la subradical:

$$-x^2-8x-7=-(x^2+8x+16-16)-7$$
$$=-(x^2+8x+16)+16-7$$
$$=-(x+4)^2+9$$

Luego: $I=\text{arc sen}\,\frac{x+4}{3}+C$

(5) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

(6) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{7-2x^2}}$

(7) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{15-9x^2+6x}}$

(8) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{16-25x^2-30x}}$

(9) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2+4x}}$

(10) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{20-25x^2+40}}$

(27) $$\int\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2+a^2}}=\text{Ln}|\mu+\sqrt{\mu^2+a^2}\,|+C$$

(1) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}=\text{Ln}|x+\sqrt{x^2+9}\,|+C$

(2) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\,x\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\sqrt{3}\,x+\sqrt{3x+5}\right|+C$

Donde: $\mu=\sqrt{3}\,x \Rightarrow d\mu=\sqrt{3}\,dx$

(3) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(7x-2)^2+4}}$

$=\frac{1}{7}\text{Ln}|7x-2+\sqrt{(7x-2)^2+4}\,|$

Donde: $\mu=7x-2 \Rightarrow d\mu=7\,dx$

(4) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+25}}=\,?$

Completar cuadrados en la subradical:

$4x^2-12x-9-9+25=(2x-3)^2+16$

Luego:

$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-3)^2+16}}$

$=\frac{1}{2}\text{Ln}|2x-3+\sqrt{(2x-3)^2+16}\,|$

Donde: $\mu=2x-3 \Rightarrow d\mu=2\,dx$

(5) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$

(6) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{64x^2-48x+25}}$

(7) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$

(8) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{81x^2-72x+52}}$

(9) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+109}}$

(28) $$\int \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - a^2}} = \text{Ln}|\mu + \sqrt{\mu^2 - a^2}| + C \qquad \mu = \mu(x)$$

(1) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

$$= \text{Ln}|x + \sqrt{x^2 - 25}| + C$$

(2) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 5}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3}\,x)^2 - (\sqrt{5})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Ln}|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 5}| + C$$

(3) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(5x-1)^2 - 16}}$$

$$= \frac{1}{5} \text{Ln}|5x - 1 + \sqrt{(5x-1)^2 - 16}|$$

Donde:

$$\mu = 5x - 1 \Rightarrow d\mu = 5dx$$

(4) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 24x - 27}} = ?$$

Completando cuadrados en la sub-radical:

$$16x^2 - 24x - 27 = 16x^2 - 24x + 9 - 9 - 27$$

$$= (4x-3)^2 - 36$$

Luego:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(4x-3)^2 - 36}}$$

$$= \frac{1}{4} \text{Ln}|4x - 3 + \sqrt{(4x-3)^2 - 36}|$$

Donde: $\mu = 4x - 3 \Rightarrow d\mu = 4dx$

(5) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

(6) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}}$$

(7) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 + 20x - 96}}$$

(8) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}$$

(9) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{36x^2 - 12x - 15}}$$

(29) $$\int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{\mu}{a} + C \qquad \mu = \mu(x)$$

(1) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{3} + c$$

(2) $$I = \int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec}\frac{2x-1}{2}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sec}\frac{2x-1}{2} + C$$

Donde: $\mu = 2x - 1 \Rightarrow d\mu = 2dx$

(3) $$I = \int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{\cos 2x\sqrt{\cos^2 2x - 16}} = ?$$

Pero:

$$\mu = \cos 2x \Rightarrow d\mu = -2\operatorname{sen}2x\,dx$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{d\mu}{2\operatorname{sen}2x}$$

Luego:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}2x\left(-\frac{d\mu}{2\operatorname{sen}2x}\right)}{\mu\sqrt{\mu^2-16}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2-16}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\operatorname{arc\,sec}\frac{\mu}{4}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{8}\operatorname{arc\,sec}\frac{\cos 2x}{4} + C$$

(4) $$I = \int \frac{\cos 3x\,dx}{\operatorname{sen}3x\sqrt{\operatorname{sen}^2 3x - 25}} = ?$$

(5) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

(6) $$I = \int \frac{dx}{(3x-1)\sqrt{9x^2-6x-2}}$$

(7) $$I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-12}}$$

(8) $$I = \int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4-2x^2-3}}$$

(9) $$I = \int \frac{dx}{(2-5x)\sqrt{25x^2-20x-32}}$$

(10) $$I = \int \frac{dx}{(1-2x)\sqrt{4x^2-4x+3}}$$

(30) $$\boxed{\int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\,\text{Ln}\left(\frac{a+\sqrt{\mu^2+a^2}}{\mu}\right)+C} \qquad \mu=\mu(x)$$

(1) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{x^2+5}}{x}\right)+C$$

(2) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+3}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,d\mu}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mu\sqrt{\mu^2+3}}$$

Hacer: $\mu=\sqrt{2}x \Rightarrow d\mu=\sqrt{2}\,dx$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\mu \Rightarrow dx=\frac{1}{\sqrt{2}}d\mu$

Luego:

$$I = \int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2+3}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{\mu^2+3}}{\mu}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{2}\,x}\right)+C$$

$$I = \int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+9}}$$

$$= -\frac{1}{6}\,\text{Ln}\left(\frac{3+\sqrt{(2x-1)^2+9}}{2x-1}\right)+C$$

Donde: $\mu=2x-1 \Rightarrow d\mu=2dx$

(4) $$I = \int \frac{dx}{(3x+2)\sqrt{9x^2+12x+8}}$$

(5) $$I = \int \frac{dx}{(3-5x)\sqrt{25x^2-30x+25}}$$

(6) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+3}}$$

(7) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2+5}}$$

(8) $$I = \int \frac{dx}{x\,\text{Ln}x\sqrt{\text{Ln}^2x+4}}$$

(31) $$\boxed{\int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{a^2-\mu^2}} = -\frac{1}{a}\,\text{Ln}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-\mu^2}}{\mu}\right)+C}$$

(1) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\text{Ln}\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right)+C$$

(2) $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5-3x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{x\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}x)^2}}$$

Hacer: $\mu=\sqrt{3}\,x \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}\mu$

$\Rightarrow dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\,d\mu$

Luego: $I = \int \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,d\mu}{\frac{\mu}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sqrt{5})^2-\mu^2}}$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{(\sqrt{5})^2-\mu^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-3x^2}}{\sqrt{3}\,x}\right)$$

③ $I = \int \dfrac{dx}{(3x-1)\sqrt{4-(3x-1)^2}}$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{2+\sqrt{4-(3x-1)^2}}{3x-1}\right)+C\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\,\text{Ln}\left(\frac{2+\sqrt{4-(3x-1)^2}}{3x-1}\right)+C$$

Donde: $\mu = 3x-2 \Rightarrow d\mu = 3dx$

④ $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{7-3x^2}}$

⑤ $I = \int \dfrac{dx}{(2-5x)\sqrt{12+20x-25x^2}}$

⑥ $I = \int \dfrac{dx}{x\,Lnx\sqrt{9-Ln^2x}}$

⑦ $I = \int \dfrac{\sec^2 3x\,dx}{tg3x\sqrt{16-tg^2\,3x}}$

Observación

Hay fórmulas que no son necesarias aprenderse de memoria, tales como ocurren con las fórmulas 21 hasta la 31. Las fórmulas 21 y 22 se pueden integrar por el método de fracciones parciales.

Las fórmulas desde la 23 hasta la 31 se pueden integrar fácilmente por el método de SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

Otros Ejemplos:

① $\int \dfrac{dx}{(2x-1)\sqrt{3+4x-4x^2}} = \int \dfrac{dx}{(2x-1)\sqrt{4-(2x-1)^2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2+\sqrt{4-(2x-1)^2}}{2x-1}\right)+C$

↑ *completar cuadrados:*

$$-4x^2+4x+3 = -(4x^2-4x+1)+1+3$$

$$= -(2x-1)^2+4$$

Hacer: $\mu = 2x-1$

$d\mu = 2dx \quad , \quad a = 2$

② $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x^2-2x+4}} = \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{(1-x)^2+3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{(1-x)^2+3}}{1-x} \right) + C$

$\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2+3} -1+3 \;;\; \mu = 1-x \;,\; a = \sqrt{3}$

③ $\int \frac{dx}{x\,.\,\text{Ln}x\sqrt{4-\text{Ln}^2x}} = \int \frac{x \cdot d\mu}{x \cdot \mu\sqrt{4-\mu^2}} = \int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{4-\mu^2}} = -\frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{2+\sqrt{4-\mu^2}}{\mu} \right) + C$

Hacer: $\mu = \text{Ln}\,x$ $\qquad = -\frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{2+\sqrt{4-\text{Ln}^2x}}{\text{Ln}x} \right) + C$

$d\mu = \frac{1}{x}\,dx$

$dx = x \cdot d\mu$

④ $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(2x)^2-1}} = \frac{1}{2} \cdot arc\ sec\ 2x + C$

Hacer: $\mu = 2x$

$d\mu = 2 \cdot d\mu$

⑤ $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+5}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(\sqrt{3}\,x)^2+(\sqrt{5})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3x^2+5}}{\sqrt{3}\,x} \right) + C\right.$

Hacer: $\mu = \sqrt{3}\,x \;,\; \sqrt{5} = a$

$d\mu = \sqrt{3} \cdot dx$

4. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

4.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Fórmula: $\int \mu \cdot dv = \mu \cdot v - \int v \cdot d\mu$ donde $\mu(x)$ y $v(x)$ son funciones.

La integración por partes se aplica cuando en el integrando se encuentra el producto de dos funciones que pueden ser: polinomios por arcos, polinomios por logaritmo, polinomio por seno, polinomio por coseno, polinomio por exponencial, seno por exponencial, coseno por exponencial, $\sec^3 \mu$, $\csc^3 \mu$.

Sugerencia para usar esta fórmula:

1. La función dv debe ser aquella que se pueda integrar inmediatamente.
2. Tener cuidado que un sólo ejercicio, a veces, se tiene que integrar por partes más de una vez, o puede resultar una **INTEGRAL CIRCULAR.**

Ejemplos:

① Calcular: $I = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\text{sen}\, x\, dx}_{dv}$

En este caso, se elige $dv = \text{sen}\, x\, dx$, que es fácil de integrar y $\mu = x$. Luego, integramos $dv = \text{sen}\, x\, dx$ y hallamos el diferencial de $\mu = x$. A continuación se aplica la fórmula. Ordenando y resumiendo este proceso es como sigue:

$$\mu = x \qquad dv = \text{sen}\, x \cdot dx$$
$$d\mu = dx \qquad v = -\cos x$$

Por lo tanto: $I = -x\cos x + \int \cos x\, dx$

$$\boxed{I = -x \cdot \cos x + \text{sen}\, x + C}$$

② Calcular: $I = \int x \cdot e^x\, dx$

Veamos:

$$\mu = x \qquad dv = e^x dx$$
$$d\mu = dx \longleftarrow v = e^x$$

> ***Nota:*** *Algunos productos de funciones se integran por partes con el propósito de convertirlas en otras integrales de fácil e inmediato cálculo. Ver el ejemplo 3.*

Por lo tanto: $I = x \cdot e^x - \int e^x\, dx$

$$\boxed{I = x \cdot e^x - e^x + C}$$

(3) Calcular: $I = \int x \cdot \sqrt{1+x} \cdot dx$

Veamos:

$$\mu = x \qquad dv = \sqrt{1+x} \cdot dx$$
$$d\mu = dx \longleftarrow v = \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}$$

Por lo tanto:

$$I = \tfrac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\int (1+x)^{3/2}\, dx = \tfrac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2}$$

$$\boxed{I = \tfrac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \tfrac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C}$$

4.1.1. INTEGRAL POR PARTES DEL PRODUCTO DE POLINOMIOS POR ARCOS

En este caso se recomienda elegir como "μ" la función arco.

(4) Calcular: $I = \int \underbrace{\text{arc sen}\, x}_{\mu}\ \underbrace{dx}_{dv}$

Veamos:

$$\mu = \text{arc sen}\, x \qquad dv = dx$$
$$d\mu = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \longleftarrow v = x$$

Por lo tanto: $I = x \operatorname{arc\,sen} x - \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{\text{Integrar como potencia}} = x \operatorname{arc\,sen} x + (1-x^2)^{1/2} + C$

Integrar como potencia

⑤ Calcular: $I = \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

Veamos

$\mu = \operatorname{arc\,tg} x \qquad dv = dx$

$d\mu = \frac{1}{1+x^2}dx \longleftarrow v = x$

Por lo tanto: $I = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$

$$\boxed{I = x \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} x - \tfrac{1}{2} \cdot \operatorname{Ln}(1+x^2) + C}$$

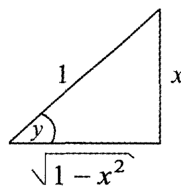
⑥ Calcular: $I = \int (\operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen} x)^2 \, dx$

Veamos:

1.- Hagamos la siguiente sustitución:

(i) $\boxed{y = \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen} x} \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{sen} y}$

(ii) $\boxed{dx = \cos y \, dy}$



2.- Sustituyendo (i) y (ii) en la integral I :

$I = \int y^2 \cos y \, dy$ .... *(En este caso se recomienda elegir como la función "u" al polinomio y^2).*

3.- Ahora integremos I por partes:

$\mu = y^2 \qquad dv = \cos y \cdot dy$

$d\mu = 2y \cdot dy \longleftarrow v = \operatorname{sen} y$

Luego: $I = y^2 \operatorname{sen} y - 2 \underbrace{\int y \cdot \operatorname{sen} y \, dy}_{I_1}$ .... (a)

4.- Cálculo de I_1 por partes:

$$\mu = y \qquad dv = \operatorname{sen} y \cdot dy$$
$$d\mu = dy \qquad v = -\cos dy$$

Entonces: $I_1 = -y \cdot \cos y + \int \cos y \, dy$

$I = -y \cos y + \operatorname{sen} y + C_1$ .... (b)

Reemplazando (b) en (a): $I = y^2 \operatorname{sen} y - 2(-y \cos y + \operatorname{sen} y + C_1)$

$I = y^2 \operatorname{sen} y + 2y \cos y - 2 \operatorname{sen} y - 2C_1$

5.- $\boxed{I = y^2 \operatorname{sen} y + 2y \cos y - 2 \operatorname{sen} y + C_2}$

6.- En consecuencia: $\boxed{I = (\operatorname{arc\,sen} x)^2 \cdot x + (2 \operatorname{arc\,sen} x)\sqrt{1 - x^2} - 2x + C_2}$

(7) Calcular: $I = \int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$

Veamos:

$$\mu = \operatorname{arc\,tg} x \qquad dv = x \cdot dx$$
$$d\mu = \frac{1}{1 + x^2} dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Por lo tanto: $I = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx}_{I_1}$

Cálculo de I_1 :

Lo primero que se hace es, dividir:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^2 - 1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Luego:

$$I_1 = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$I_1 = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

$$I_1 = x - \text{arctg}\, x + C_1$$

Sustituyendo I_1 en I: $I = \frac{x^2}{2} \cdot \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2}(x - \text{arctg}\, x + C_1)$

$$\boxed{I = \frac{x^2}{2} \cdot \text{arctg}\, x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\text{arctg}\, x - \frac{1}{2}C_1}$$

(8) Calcular: $I = \int \text{arc sen}\sqrt{\frac{x}{2}}\, dx$

1.- Hacer: $\boxed{y = \text{arc sen}\sqrt{\frac{x}{2}}}$ (i)

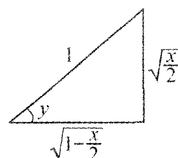
$$\sqrt{\frac{x}{2}} = \text{sen}\, y$$

$$\frac{x}{2} = \text{sen}^2 y$$

$$x = 2\,\text{sen}^2 y$$

$$dx = 2(2\text{sen}\, y \cdot \cos y\, dy)$$

$$\boxed{dx = 2\,\text{sen}\, 2y \cdot dy} \quad \text{(ii)}$$



2.- Sustituyendo (i) y (ii) en la integral I :

$$I = \int y \cdot (2\text{sen}\, 2y \cdot 2dy)$$

$$I = 2\int \underbrace{y}_{u} \cdot \underbrace{\text{sen}\, 2y \cdot dy}_{dv}$$

3.- Ahora integremos I por partes:

$$u = y \qquad dv = \text{sen}\, 2y \cdot dy$$

$$du = dy \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2y$$

Luego: $I = 2\left[-\frac{y}{2}\cos 2y + \frac{1}{2}\cdot \int \cos 2y \cdot dy \right]$

$$I = 2\left[-\frac{y}{2}\cos 2y + \frac{1}{4}\cdot \operatorname{sen} 2y + C_1 \right]$$

$$I = -y\cos 2y + \frac{1}{2}\cdot \operatorname{sen} 2y + 2\,C_1$$

$$I = -y\,(\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y) + \frac{1}{2}(2\operatorname{sen} y\cdot\cos y) + C$$

4.- Por el primer paso, podemos volver a hacer lo siguiente:

$$I = -\text{arc sen}\sqrt{\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{\frac{x}{2}}\sqrt{1 - \frac{x}{2}} + C$$

$$\boxed{I = \left(-\text{arc sen}\sqrt{\frac{x}{2}}\right)(1 - x) + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2x - x^2} + C}$$

9 Calcular: $I = \int \frac{x \text{ arcsen } x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Veamos: $I = \int x \frac{\text{arc sen } x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$

Ahora integremos I por partes:

$u = x$ $\qquad dv = \frac{\text{arc sen}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

$du = dx \leftarrow v = \frac{1}{2}(\text{arc sen } x)^2$

Luego: $I = \frac{1}{2}x\,(\text{arc sen } x)^2 - \frac{1}{2}\int (\text{arc sen } x)^2\,dx$

Cálculo de I_1: Pero I_1, está calculado en el ejercicio 6.

Luego:

$$I = \frac{1}{2}x(\text{arc sen } x)^2 - \frac{1}{2}\left[(\text{arc sen } x)^2\cdot x + (2\,\text{arc sen } x)\sqrt{1 - x^2} - 2x \right]$$

$$\boxed{I = -\sqrt{1 - x^2}\ \text{arc sen } x + x + C}$$

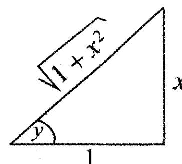
(10) Calcular: $I = \int x\,(\text{arctg}\,x)^2\,dx$

Veamos:

1.- Hagamos el siguiente cambio de variable:

(i) $\boxed{y = \text{arc}\,tg\,x} \iff x = \text{tg}\,y \Rightarrow$

$\boxed{dx = \sec^2 y \cdot dy}$ (ii)



$\text{tg}\,y = x$

$\sec y = \sqrt{1+x^2}$

2.- Sustituyendo (i) y (ii) en la integral I :

$$I = \int (\text{tg}\,y)\,(y)^2\,(\sec^2 y\,dy)$$

$$I = \int \underbrace{y^2}_{u}\;\underbrace{\text{tg}\,y \cdot \sec^2 y\,dy}_{dv}$$

3.- Ahora integremos I por partes:

$u = y^2 \qquad dv = tg\,y \cdot \sec^2 y \cdot dy$

$du = 2y \cdot dy \qquad v = \frac{1}{2}\text{tg}^2 y$

Luego: $I = \frac{1}{2} \cdot y^2\,\text{tg}^2\,y - \underbrace{\int y\,\text{tg}^2\,y\,dy}_{I_1}$

4.- Cálculo de I_1 por partes:

$u = y \qquad dv = \text{tg}^2 \cdot dy$

$dv = (\sec^2 y - 1)dy$

$du = dy \qquad v = \text{tg}\,y - y$

Entonces: $I_1 = y\,\text{tg}\,y - y^2 - \int (\text{tg}\,y - y)\,dy$

$$I_1 = y\,\text{tg}\,y - y^2 - \text{Ln}|\sec y| + \frac{y^2}{2} + C_1$$

5.- Sustituyendo I_1 en la Integral I del paso 3:

$$I = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \operatorname{tg}^2 y - \left[y \operatorname{tg} y - y^2 - \operatorname{Ln}|\sec y| + \frac{y^2}{2} + C_1 \right]$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \operatorname{tg}^2 y - y \operatorname{tg} y + y^2 + \operatorname{Ln}|\sec y| - \frac{y^2}{2} - C_1$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \cdot y^2 \operatorname{tg}^2 y - y \operatorname{tg} y + \frac{y^2}{2} + \operatorname{Ln}|\sec y| + C}$$

(11) Calcular: $\quad I = \int x^2 \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x)\, dx$

Veamos:

$$u = \operatorname{arc\,tg}(3x) \qquad dv = x^2 \cdot dx$$

$$du = \frac{3}{1+9x^2}\, dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg}(3x) - \int \frac{x^3}{1+9x^2}\, dx \quad \text{.......................} \quad \text{Pero:}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 9x^2+1 \\ \hline -x^3 - \frac{1}{9}x & \frac{1}{9}x \\ \hline 0 - \frac{1}{9}x & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{1+9x^2} = \frac{1}{9}x + \frac{-\frac{1}{9}x}{1+9x^2}$$

$$I = \frac{x^2}{3} \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \int \left[\frac{1}{9}x - \frac{1}{9} \cdot \frac{x}{1+9x^2} \right] \cdot dx$$

$$I = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{9} \int x \cdot dx + \frac{1}{9} \int \frac{x}{1+9x^2} \cdot dx$$

$$I = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{9} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{18} \cdot \operatorname{Ln}(1+9x^2) + C$$

$$\boxed{I = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arc\,tg}(3x) - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{162} \cdot \operatorname{Ln}(1+9x^2) + C}$$

(12) Calcular: $\quad I = \int \frac{\operatorname{arc \cdot sen} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$

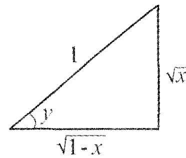
1.- Hagamos la siguiente sustitución:

(i) $\quad \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x} = y$

$$\sqrt{x} = \operatorname{sen} y \longrightarrow$$

(ii) $$x = \operatorname{sen}^2 y$$

(iii) $$dx = 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y \cdot dy$$



2.- Reemplazando: (i) , (ii) y (iii) en la integral I:

$$I = \int \frac{y}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} \cdot 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y \, dy = \int \frac{y}{\cos y} \cdot 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y \cdot dy$$

$$I = 2 \int y \operatorname{sen} y \cdot dy = 2[-y \cos y + \operatorname{sen} y + C]$$ .... Ver Problema 1

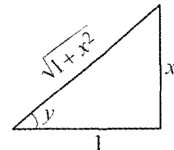
$$I = -2y \cos y + 2 \operatorname{sen} y + C_1$$

3.- Por lo tanto: $\boxed{I = -(2 \operatorname{arcsen} \sqrt{x})\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x} + C_1}$

(13) Calcular: $$I = \int \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^3} dx$$

Hagamos la sustitución:

(i)
$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{arc tg} x &= y \\ x &= \operatorname{tg} y \\ dx &= \sec^2 y \cdot dy \end{aligned}} \longrightarrow$$



Reemplazando (i) en I :

$$I = \int \frac{(\operatorname{tg} y)(y)}{(1+\operatorname{tg}^2 y)^3} \cdot \sec^2 y \cdot dy = \int \frac{y \cdot \operatorname{tg} y \cdot \sec^2 y \cdot dy}{(\sec^2 y)^3} = \int \frac{y \cdot \operatorname{tg} y}{\sec^4 y} dy$$

$$I = \int \frac{y \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{\frac{1}{\cos^4 y}} \cdot dy = \int \frac{y \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos^4 y}{\cos y} dy = \int \underbrace{y}_{u} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} y \cdot \cos^3 y \cdot dy}_{dv}$$

$$u = y \qquad dv = \operatorname{sen} y \cdot \cos^3 y \cdot dy$$

$$du = dy \qquad v = \frac{-\cos^4 y}{y}$$

Luego: $$I = -\frac{y \cos^4 y}{4} + \frac{1}{4} \underbrace{\int \cos^4 y \cdot dy}_{I_1}$$

Cálculo de I_1 :

$$I_1 = \int \cos^4 y \cdot dy = \int \left[\tfrac{1}{2}(1+\cos 2y) \right]^2 dy = \tfrac{1}{4} \int (1+2\cos 2y + \cos^2 2y) dy$$

$$I_1 = \tfrac{1}{4} \int dy + \tfrac{1}{2} \int \cos 2y \, dy + \tfrac{1}{4} \int \cos^2 2y \, dy$$

$$I_1 = \tfrac{1}{4} y + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 2y + \tfrac{1}{8} y + \tfrac{1}{32} \operatorname{sen} 4y + C_1$$

$$\int \cos^2 2y \, dy = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 4y) dy = \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{8} \operatorname{sen} 4y$$

Reemplazando I_1 en I :

$$I = -\frac{y\cos^4 y}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left[\tfrac{1}{4} y + \tfrac{1}{4} \cdot \operatorname{sen} 2y + \tfrac{1}{8} y + \tfrac{1}{32} \operatorname{sen} 4y + C_1 \right]$$

$$I = -\frac{y\cos^4 y}{4} + \tfrac{1}{16} y + \tfrac{1}{16} \operatorname{sen} 2y + \tfrac{1}{32} y + \tfrac{1}{128} \operatorname{sen} 4y + \tfrac{1}{4} C_1$$

$$I = -\frac{y\cos^4 y}{4} + \tfrac{3}{32} y + \tfrac{1}{16} \operatorname{sen} 2y + \tfrac{1}{128} \operatorname{sen} 4y + C \ldots\ldots\ldots (ii)$$

Reemplazando (i) en (ii):

$$\boxed{I = -\frac{\operatorname{arctg} x}{4(1+x^2)^2} + \tfrac{3}{32} \operatorname{arctg} x + \tfrac{1}{16} \operatorname{sen} 2(\operatorname{arctg} x) + \tfrac{1}{128} \operatorname{sen} 4(\operatorname{arctg} x) + C}$$

(14) **Calcular:** $I = \int x \cdot \operatorname{arc\,sen} x \cdot dx$

Veamos:

$$u = \operatorname{arc\,sen} x \qquad dv = x \cdot dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Por lo tanto: $$I = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{I_1}$$

Cálculo I_1 de por partes:

$$I_1 = \int x^2(1-x^2)^{-1/2}dx = \int x \cdot x(1-x^2)^{-1/2}dx$$

$$\mu = x \qquad d\upsilon = x(1-x^2)^{-1/2}dx$$

$$\upsilon = -\tfrac{1}{2}2(1-x^2)^{1/2}$$

$$d\mu = dx \longleftarrow \qquad \upsilon = -\sqrt{1-x^2}$$

$$I_1 = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Aplicar la fórmula 25

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\text{arcsen}\,x + c$$

$$I_1 = \tfrac{1}{2}\text{arcsen}\,x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Por lo tanto sustituyendo I_1 en I tenemos:

$$I = \tfrac{x^2}{2}\cdot \text{arc sen}\,x - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\cdot \text{arc sen}\,x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{4}\cdot(2x^2-1)\text{arc}\cdot\text{sen}\,x + \tfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C}$$

(15) Calcular: $I = \int \text{arc tg}\sqrt{x}\cdot dx$

Veamos:

$$u = \text{arc tg}\sqrt{x} \qquad d\upsilon = dx$$

$$du = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot dx$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}dx \longleftarrow \qquad \upsilon = x$$

Por lo tanto: $I = x\,\text{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}\cdot dx}_{I_1}$

Cálculo de I_1 :

Haciendo la siguiente sustitución: ① $\begin{cases} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t \cdot dt \end{cases}$

Reemplazando ① en I_1 tenemos:

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = \int \frac{t^2}{t\,(1+t^2)} \cdot 2t \cdot dt$$

$$I_1 = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$I_1 = 2\,(t - \operatorname{arctg} t)$$

$$I_1 = 2\,(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x})$$

Sustituyendo I_1 en I :

$$I = x \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \tfrac{1}{2} 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) + C$$

$$I = x \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$$

$$\boxed{I = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C}$$

4.1.2. INTEGRAL POR PARTES DEL PRODUCTO DE POLINOMIOS POR LOGARITMO

En este caso considerar como "u" la función logaritmo.

(16) Calcular: $I = \int \operatorname{Ln} x \cdot dx$

Veamos:

$u = \operatorname{Ln} x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} \cdot dx \qquad v = x$

Luego:

$$I = x \cdot \operatorname{Ln} x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \iff I = x \cdot \operatorname{Ln} x - \int dx$$

$$I = x \cdot \operatorname{Ln} x - x + C$$

$$\boxed{I = x(\operatorname{Ln} x - 1) + C}$$

(17) Calcular: $I = \int x^2 \operatorname{Ln} x \cdot dx$

Veamos: $u = \text{Ln}\,x$ $\quad dv = x^2 \times dx$

$du = \frac{1}{x} \cdot dx \quad v = \frac{x^3}{3}$

Luego: $I = \frac{x^3}{3} \cdot \text{Ln}\,x - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{x^3}{x} dx$

$$I = \frac{x^3}{3} \cdot \text{Ln}\,x - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 dx$$

$$\boxed{I = \frac{x^3}{3} \cdot \text{Ln}\,x - \frac{1}{9} \cdot x^3 + C}$$

(18) Calcular: $I = \int \frac{\text{Ln}\,(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$

1.- Hacer la sustitución:

$$\text{(i)} \begin{cases} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t \cdot dt \end{cases}$$

2.- Reemplazando (i) en I:

$$I = \int \frac{\text{Ln}\,(t^2)}{t} \cdot 2t \cdot dt$$

$$I = \int \frac{2\,\text{Ln}\,(t)}{t} \cdot 2t \cdot dt$$

$I = 4 \int \text{Ln}\,(t)\, dt$ Ver ejercicio 16

$$I = 4\left[\, t\,(\text{Ln}t - 1) + C \,\right]$$

$$I = 4\left[\, \sqrt{x+1}\,(\text{Ln}\sqrt{x+1} - 1) + C \,\right]$$

$$\boxed{I = 4\left[\, \sqrt{x+1}\left(\tfrac{1}{2}\text{Ln}(x+1) - 1\right) + C \,\right]}$$

(19) Calcular: $I = \int x \cdot \text{Ln}\left[\frac{1-x}{1+x}\right] dx$

$u = \text{Ln}\left[\frac{1-x}{1+x}\right] \quad dv = x\,dx$

$$u = \text{Ln}(1-x) - \text{Ln}(1+x)$$

$$du = \frac{-1}{1-x}dx - \frac{1}{1+x}dx$$

$du = \frac{-2dz}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1-x^2}dx \quad v = \frac{x^2}{2}$

Luego: $I = \frac{x^2}{2}\,\text{Ln}\left[\frac{1-x}{1+x}\right] + \int \frac{x^2}{1-x^2}\cdot dx$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^2+1 & -1 \\ \cline{1-1} 0+1 & \end{array}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\cdot \text{Ln}\left[\frac{1-x}{1+x}\right] + \int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$I = \frac{x^2}{2}\cdot \text{Ln}\left[\frac{1-x}{1+x}\right] - x + \frac{1}{2}\text{Ln}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

$$\boxed{I = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\text{Ln}\left[\frac{1-x}{1+x}\right] - x + C}$$

Pues: $\text{Ln}\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = -\text{Ln}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]$

20 Calcular: $I = \int \text{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

$u = \text{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})$ $\qquad$ $dv = dx$

$$du = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$$

$$du = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$ $\longleftarrow$ $v = x$

Luego: $I = x\cdot\text{Ln}\,(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$

$$\boxed{I = x\cdot\text{Ln}\,(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C}$$

21 Calcular: $I = \int x\cdot\text{Ln}\left[\sqrt{1+x^2}\right]dx$

Pero: $\text{Ln}\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\text{Ln}\,(1+x^2)$

Entonces: $I = \frac{1}{2}\int x\cdot\text{Ln}\,(1+x^2)\,dx$

Ahora integremos por partes: $u = \text{Ln}(1+x^2)$ $\quad dv = x \cdot dx$

$du = \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \longleftarrow v = \frac{x^2}{2}$

Luego: $I = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot \text{Ln}(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2} \cdot dx \right]$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x & x \\ \hline 0 - x & \end{array}$$

$I = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot \text{Ln}(1+x^2) - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \right]$

$I = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot \text{Ln}(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{Ln}(1+x^2) \right] + C$

$$\boxed{I = \frac{1}{4} \cdot (x^2+1)\,\text{Ln}(1+x^2) - \frac{x^2}{4} + C}$$

(22) Calcular: $I = \int \frac{\text{Ln}x}{(x+1)^2} \cdot dx$

$u = \text{Ln}\,x$ $\quad dv = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dv$

$dv = (x+1)^{-2} \cdot dx$

$v = \frac{(x+1)^{-1}}{-1}$

$du = \frac{1}{x} \cdot dx \longleftarrow v = -\frac{1}{x+1}$

Luego: $I = -\frac{1}{x+1} \cdot \text{Ln}x + \int \frac{1}{x(x+1)} \cdot dx$

$I = -\frac{1}{x+1} \text{Ln}x + \int \frac{1}{x^2+x} \cdot dx \longleftarrow$ completando cuadrados

$I = -\frac{1}{x+1} \text{Ln}\,x + \int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} \cdot dx$

$I = -\frac{1}{x+1} \cdot \text{Ln}\,x + \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} dx$

$I = -\frac{1}{x+1} \text{Ln}\,x + \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} \text{Ln} \left| \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \right| + C$

$$\boxed{I = -\frac{1}{x+1}\,\text{Ln}\,x + \text{Ln}\left|\frac{x}{x+1}\right| + C}$$

(23) Calcular $I = \int x^2 \cdot \text{Ln}\,(\sqrt{1-x})\,dx$; pero $\text{Ln}\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\cdot\text{Ln}(1-x)$

Luego: $I = \frac{1}{2}\cdot\int x^2 \cdot \text{Ln}\,(1-x)\,dx$

Hagamos:

$$u = \text{Ln}(1-x) \qquad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{-1}{1-x}\cdot dx$$

$$du = \frac{1}{x-1}\,dx \longleftarrow v = \frac{x^3}{3}$$

Luego: $I = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\text{Ln}(1-x) - \frac{1}{3}\cdot\int\frac{x^3}{x-1}\cdot dx\right]$, Pero:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ \cline{1-1} 0+x^2 & \\ -x^2+x & \\ \cline{1-1} 0+x & \\ -x+1 & \\ \cline{1-1} 0+1 & \end{array}$$

Entonces: $I = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\text{Ln}(1-x) - \frac{1}{3}\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx\right]$

$$I = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\text{Ln}(1-x) - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\text{Ln}\,|x-1|\right)\right] + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{6}\cdot x^3\text{Ln}(1-x) - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\cdot\text{Ln}|x-1| + C}$$

(24) Calcular: $I = \int\frac{\text{Ln}^2(x)}{x^2}\cdot dx$

Hagamos:

$$u = \text{Ln}(x) \qquad dv = \frac{1}{x^2}dx$$

$$du = 2\text{Ln}(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \qquad dv = x^{-2}\cdot dx$$

$$du = \frac{2}{x}\cdot\text{Ln}(x)dx \longleftarrow v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

Por lo tanto:

$$I = -\frac{1}{x}\,\mathrm{Ln}^2(x) + 2\underbrace{\int \frac{1}{x^2}\cdot \mathrm{Ln}(x)\,dx}_{I_1}$$

Ahora calcularemos I_1 por partes:

$$u_1 = \mathrm{Ln}\,x \qquad dv_1 = \frac{1}{x^2}\cdot dx$$

$$du_1 = \frac{1}{x}\cdot dx \qquad v_1 = -\frac{1}{x}$$

Por lo tanto: $I = -\frac{1}{x}\,\mathrm{Ln}^2(x) + 2\left[-\frac{1}{x}\cdot \mathrm{Ln}x + \int \frac{1}{x^2}\cdot dx\right]$

$$\boxed{I = -\frac{1}{x}\cdot \mathrm{Ln}^2(x) - 2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{Ln}\,x - \frac{2}{x} + C}$$

25 Calcular: $I = \int y^{2/3}\mathrm{Ln}(3y)\,dy$.

Veamos:

$$u = \mathrm{Ln}(3y) \qquad dv = y^{2/3}dy$$

$$du = \frac{3}{3y}\cdot dy \qquad v = \frac{y^{2/3+1}}{2/3+1}$$

$$du = \frac{1}{y}\cdot dy \qquad v = \frac{3}{5}y^{5/3}$$

Por lo tanto: $I = \frac{3}{5}\cdot y^{5/3}\,\mathrm{Ln}(3y) - \frac{3}{5}\int y^{2/3}\,dy$

$$\boxed{I = \frac{3}{5}\cdot y^{5/3}\,\mathrm{Ln}(3y) - \frac{9}{25}\cdot y^{5/3} + C}$$

26 Calcular: $I = \int x\,\mathrm{Ln}x\,dx$

Veamos:

Haciendo:

$$u = \text{Ln}\, x \qquad dv = x\, dx$$

$$du = \frac{1}{x} \cdot dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Luego: $I = \frac{x^2}{2} \cdot \text{Ln}\, x - \frac{1}{2} \int x\, dx$

$$I = \frac{x^2}{2} \cdot \text{Ln}\, x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{I = \frac{x^2}{4}(2\,\text{Ln}\, x - 1) + C}$$

(27) Calcular: $I = \int x^n \cdot \text{Ln}\, x\, dx\ ,\ n \in \mathbb{Z}^+$

***Solución*:**

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{Ln}\, x - \frac{1}{(n+1)^2}\, x^{n+1} + C$$

(28) Calcular: $I = \int \frac{\text{Ln}\, x}{\sqrt{x}}\, dx$.

***Solución*:**

$$I = 2\sqrt{x}(\text{Ln}\, x - 2) + C$$

4.1.3. INTEGRAL POR PARTES DEL PRODUCTO DE POLINOMIOS CON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En este caso elegimos como "u" a la función polinomio.

(29) **Calcular:** $I = \int x \cdot \cos(nx) \cdot dx$

Haciendo: $u = x$ $\quad dv = \cos(nx)dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{1}{n} \cdot \text{sen}(nx)$

Luego: $I = \frac{1}{n} \cdot x \,\text{sen}(nx) - \frac{1}{n} \cdot \int \text{sen}(nx)\,dx$

$$I = \frac{1}{n} \cdot x \,\text{sen}(nx) - \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right] + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{n} \cdot x \,\text{sen}(nx) + \frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) + C}$$

(30) **Calcular:** $I = \int w \cos(3w)\,dw$

Es similar al ejercicio 29.

Solución: $I = \frac{1}{3} w \,\text{sen}(3w) + \frac{1}{9}\cos(3w) + C$

(31) **Calcular:** $I = \int x \cdot \text{sen}^2(3x)\,dx$

Haciendo:

$u = x$ $\quad dv = \text{sen}^2(3x)dx$

$dv = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\text{sen}(6x)\right)$

Luego: $I = \frac{1}{2} \cdot x\left(x - \frac{1}{6} \cdot \text{sen}\,6x\right) - \frac{1}{2} \cdot \int \left(x - \frac{1}{6} \cdot \text{sen}\,6x\right)dx$

$$I = \tfrac{1}{2}\cdot x^2 - \tfrac{1}{12}\, x \,\text{sen}\,(6x) - \tfrac{1}{2}\cdot\left[\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{36}\cos(6x)\right] + C$$

$$I = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{12}\, x \,\text{sen}\,(6x) - \tfrac{1}{4}\cdot x^2 - \tfrac{1}{72}\cdot\cos(6x) + C$$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{4}\cdot x^2 - \tfrac{1}{12}\cdot x\,\text{sen}\,(6x) - \tfrac{1}{72}\cdot\cos(6x) + C}$$

(32) **Calcular:** $I = \int x^2 \cdot \text{sen}\,(x)\, dx$

Hagamos:

$u = x^2 \qquad dv = \text{sen}(x)dx$

$du = 2x\cdot dx \qquad v = -\cos(x)$

Por lo tanto: $I = -x^2\cdot\cos(x) + 2\int \underbrace{x\cdot\cos(x)dx}_{I_1}$

Cálculo de I_1 :

$u = x \qquad dv = \cos(x)dx$

$du = dx \qquad v = \text{sen}(x)$

Entonces: $I = -x^2\cos(x) + 2\left[x\,\text{sen}\,(x) - \int \text{sen}\,(x)\,dx\right]$

$$\boxed{I = -x^2\cdot\cos(x) + 2x\cdot\text{sen}\,(x) + 2\cos(x) + C}$$

(33) **Calcular:** $I = \int x^3\cdot\cos(2x)\,dx$

Hagamos:

$u = x^3 \qquad dv = \cos(2x)dx$

$du = 3x^2dx \qquad v = \tfrac{1}{2}\cdot\text{sen}(2x)$

Luego: $I = \frac{1}{2} \cdot x^3 \operatorname{sen}(2x) - \frac{3}{2} \underbrace{\int x^2 \cdot \operatorname{sen}(2x)dx}_{I_1}$

Cálculo de I_1 por partes:

$u_1 = x^2 \qquad dv_1 = \operatorname{sen}(2x)dx$

$du_1 = 2x \cdot dx \qquad v_1 = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$

Por lo tanto:

$$I = \frac{1}{2} \cdot x^3 \operatorname{sen}(2x) - \frac{3}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot x^2 \cos(2x) + \int x \cdot \cos(2x)\, dx \right]$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot x^3 \operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{4} \cdot x^2 \cos(2x) - \frac{3}{2} \underbrace{\int x \cdot \cos(2x)dx}_{I_2}$$

Cálculo de I_2 por partes:

$u_2 = x \qquad dv_2 = \cos(2x)dx$

$du_2 = dx \qquad v_2 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(2x)$

Entonces:

$$I = \frac{1}{2} \cdot x^3 \operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{4} \cdot x^2 \cos(2x) - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot x \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x)\, dx \right]$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \cdot x^3 \operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{4} \cdot x^2 \cos(2x) - \frac{3}{4} \cdot x \operatorname{sen}(2x) - \frac{3}{8} \cos(2x) + C}$$

(34) ***Calcular:*** $I = \int x \cdot \operatorname{cosec}^2(x)dx$

Haciendo:

$u = x \qquad dv = \operatorname{cosec}^2(x)dx$

$du = dx \qquad v = -\operatorname{cotg}(x)$

Por lo tanto: $I = -x\ \text{cotg}(x) + \int \text{cotg}(x)\,dx$

$$\boxed{I = -x\ \text{cotg}(x) + \text{Ln}|\text{sen}(x)| + C}$$

(35) **Calcular:** $I = \int \theta \sec^2\theta\, d\theta$, **Soluc.:** $I = \theta\ \text{tg}\,\theta + \text{Ln}|\cos\theta| + C$

(36) **Calcular:** $I = \int x \cdot \cos x \cdot dx$, **Soluc.:** $I = x\ \text{sen}\,x + \cos x + C$

(37) **Calcular:** $I = \int \frac{x \cos x}{\text{sen}^2 x} \cdot dx$

Hagamos: $u = x$ $\qquad dv = \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} \cdot dx$

$dv = \cos x \cdot \text{sen}^{-2} x \cdot dx$

$v = -\text{sen}^{-1} x$

$du = dx \qquad v = \text{cosec}\,x$

Entonces: $I = -x\ \text{cosec}\,x + \int \text{cosec}\,x\,dx$

$$\boxed{I = -x\,\text{cosec}\,x + \text{Ln}|\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x| + C}$$

(38) **Calcular:** $I = \int x \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x \cdot dx$

Antes de Integrar, hagamos la siguiente sustitución:

Sabemos que: $\text{sen}\,2x = 2\text{sen}\,x \cdot \cos x$

Entonces: (i) $\boxed{\frac{1}{2}\text{sen}\,2x = \text{sen}\,x \cdot \cos x}$

sustituyendo (i) en I :

$$I = \int x\left[\tfrac{1}{2}\cdot \text{sen}\,2x\right]dx$$

$$I = \tfrac{1}{2}\cdot \int x\cdot \text{sen}\,2x\cdot dx$$

Haciendo: $u = x$ $\quad dv = \text{sen}\,2x\,dx$

$du = dx \quad v = -\tfrac{1}{2}\cos 2x$

Luego: $I = \tfrac{1}{2}\cdot\left[-\tfrac{1}{2}\cdot x\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cdot \int \cos 2x\,dx\right]$

$$\boxed{I = -\tfrac{1}{4}\cdot x\cos 2x + \tfrac{1}{8}\cdot \text{sen}\,2x + C}$$

(39) ***Calcular:*** $I = \int (x^2+5x+6)\cos(2x)\,dx$

$$I = \int x^2\cos(2x)\,dx + 5\int x\cdot\cos(2x)\,dx + 6\int \cos(2x)\,dx$$

$$I = \underbrace{\int x^2\cos(2x)\,dx}_{I_1} + 5\underbrace{\int x\cdot\cos(2x)\,dx}_{I_2} + 3\,\text{sen}(2x)$$

Cálculo de I_1

$u_1 = x^2 \quad dv_1 = \cos(2x)dx$

$du_1 = 2x\,dx \quad v_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\text{sen}(2x)$

Cálculo de I_2

$u_2 = x \quad dv_2 = \cos(2x)dx$

$du_2 = dx \quad v_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\text{sen}(2x)$

Por lo tanto:

$$I = \tfrac{1}{2}\cdot x^2\,\text{sen}(2x) - \int x\,\text{sen}(2x)dx + 5\left[\tfrac{1}{2}x\,\text{sen}(2x) - \tfrac{1}{2}\int \text{sen}(2x)dx\right] + 3\,\text{sen}(2x)$$

$$I = \tfrac{1}{2}\cdot x^2\,\text{sen}(2x) - \int x\,\text{sen}(2x)dx + \tfrac{5}{2}\cdot x\,\text{sen}(2x) - \tfrac{5}{2}\cdot\int \text{sen}(2x)dx + 3\,\text{sen}(2x)$$

$$I=\frac{1}{2}x^2\,\text{sen}(2x)-\underbrace{\int x\,\text{sen}(2x)dx}_{I_3}+\frac{5}{2}\cdot x\,\text{sen}(2x)+\frac{5}{4}\cdot\cos(2x)+3\,\text{sen}(2x)+C$$

Cálculo de I_3 por partes:

$$u_3=x \qquad dv_3=\text{sen}(2x)dx$$
$$du_3=dx \qquad v_3=-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$$

Entonces:

$$I_3=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{2}\int\cos(2x)dx$$
$$I_3=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\cdot\text{sen}(2x)$$

Reemplazando I_3 en I :

$$I=\frac{1}{2}x^2\text{sen}(2x)+\frac{1}{2}x\cos(2x)-\frac{1}{4}\text{sen}(2x)+\frac{5}{2}\cdot x\text{sen}(2x)+\frac{5}{4}\cdot\cos(2x)+3\text{sen}(2x)+C$$

$$I=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}x+3\right)\text{sen}(2x)+\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\cos(2x)+C$$

Entonces: $\boxed{I=\left(\frac{2x^2+10x+11}{4}\right)\text{sen}\,(2x)+\left(\frac{2x+5}{4}\right)\cos\,(2x)+C}$

(40) ***Calcular:*** $I=\int x\,\text{sen}^3(x)dx$

Haciendo:

$$u=x \qquad dv=\text{sen}^3(x)dx$$
$$dv=\text{sen}(x)\text{sen}^2(x)dx$$
$$dv=\text{sen}(x)[1-\cos^2(x)]\,dx$$
$$dv=\text{sen}(x)dx-\text{sen}\,x\cdot\cos^2x\,dx$$
$$du=dx \qquad v=-\cos x+\frac{\cos^3x}{3}$$

Por lo tanto: $I=-x\cos x+\frac{1}{3}\cdot x\cos^3x-\int[-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x]dx$

$$I = -x\cos x + \tfrac{1}{3}\cdot x\cos^3 x + \int \cos x\,dx - \tfrac{1}{3}\cdot\int \cos^3 x\cdot dx$$

$$I = -x\cos x + \tfrac{1}{3}x\cos^3 x + \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\cdot\int \underbrace{\cos^3 x\,dx}_{I_1}$$

Cálculo de I_1 :

$$I_1 = \int \cos^3 x\,dx$$

$$I_1 = \int \cos x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx$$

$$I_1 = \int \cos x\,dx - \int \cos x\operatorname{sen}^2 x\,dx$$

$$I_1 = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x$$

Reemplazando I_1 en I :

$$I = -x\cos x + \tfrac{1}{3}x\cos^3 x + \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\left(\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\cdot\operatorname{sen}^3 x\right)$$

$$I = -x\cos x + \tfrac{1}{3}\cdot x\cos^3 x + \underline{\underline{\operatorname{sen} x}} - \tfrac{1}{3}\underline{\underline{\operatorname{sen} x}} + \tfrac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x + C$$

$$\boxed{I = -x\cos x + \tfrac{1}{3}x\cos^3 x + \tfrac{2}{3}\cdot\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x + C}$$

41 Demostrar que:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x}\,dx = \frac{1}{m}\cdot\frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x}{\cos^{m-1} x}\,dx \quad ; \quad n \in Z^+, m \in Z^+$$

Pero: $$I = \int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x}\,dx = \int \operatorname{sen}^n x\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{m+1} x}\,dx$$

Haciendo:

$$u = \operatorname{sen}^n x \qquad dv = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{m+1} x} dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \cdot \cos^{-m-1} x \cdot dx$$

$$v = -\frac{\cos^{-m} x}{-m}$$

$$du = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x \, dx \longleftarrow v = \frac{1}{m} \cdot \cos^{-m} x$$

Luego: $$I = \frac{1}{m} \cdot \operatorname{sen}^n x \cdot \cos^{-m} x - \frac{n}{m} \int \operatorname{sen}^{n-1} x \cdot \cos^{-m+1} x \cdot dx$$

$$\boxed{I = \frac{1}{m} \cdot \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m} \int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} \cdot dx}$$

42 **Demostrar que:**

$$I = \int \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x} dx = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n} \int \frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} dx$$

Hacer: $$I = \int \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x} dx = \int \cos^m x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n+1} x} dx$$

Haciendo:

$$u = \cos^m x \qquad dv = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n+1} x} dx$$

$$dv = \cos x \cdot \operatorname{sen}^{-n-1} x \cdot dx$$

$$v = \frac{\operatorname{sen}^{-n} x}{-n}$$

$$du = -m \cos^{m-1} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx \longleftarrow v = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^n x}$$

Luego: $$I = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n} \int \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^n x} dx$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n} \int \frac{\cos^{m-1} x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} \cdot dx}$$

4.1.4 INTEGRAL POR PARTES DEL PRODUCTO DE POLINOMIO POR EXPONENCIAL

En este caso elegir como "u" la función polinomio.

(43) **Calcular:** $I = \int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$

Hagamos:

$$u = x^2 \qquad dv = e^{-x}dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = -e^{-x}$$

Por lo tanto:

$$I = -x^2 e^{-x} + 2\underbrace{\int x \cdot e^{-x}dx}_{I_1}$$

Cálculo de I_1 por partes: $u = x \qquad dv = e^{-x}dx$

$$du = dx \qquad v = -e^{-x}$$

Reemplazando en I:

$$I = -x^2 e^{-x} + 2\left[-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right]$$
$$I = -x^2 e^{-x} - 2x\,e^{-x} - 2e^{-x} + C$$
$$\boxed{I = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C}$$

(44) **Calcular:** $I = \int x^2 \cdot e^{2x}\,dx$

La solución es similar a la anterior. Debe de tratarse de "bajar" la potencia de x^2, derivando sucesivamente.

Solución: $\boxed{I = \frac{1}{2} \cdot x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x\,e^{2x} + \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + C}$

(45) **Calcular:** $I = \int x^3 \cdot e^{-x/3}\, dx$

Su desarrollo es similar al ejercicio 43.

Solución: $\boxed{I = -3\, e^{-x/3}\,(x^3 + 9x^2 + 54\,x + 162) + C}$

(46) **Calcular:** $I = \int e^{\sqrt{x}} \cdot dx$

Hagamos la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t \cdot dt \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$I = \int e^t \cdot 2t \cdot dt$$

$$I = 2 \int te^t \cdot tdt$$

Haciendo:

$$u = t \qquad dv = e^t \cdot dt$$

$$du = dt \qquad v = e^t$$

Luego: $I = 2\,(te^t - \int e^t \cdot dt)$

$$I = 2(te^t - e^t) + C$$

$$I = 2e^t(t-1) + C$$

$$\boxed{I = 2\,e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C}$$

(47) **Calcular:** $I = \int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx$

Pero: $I = \int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx = \int \underbrace{x^2}_{\mu} \cdot \underbrace{x\, e^{x^2}\, dx}_{dv}$

Ahora integremos por partes:

$$u = x^2 \qquad dv = x \cdot e^{x^2} \cdot dx$$

$$du = 2x \cdot dx \qquad v = \tfrac{1}{2} e^{x^2}$$

Por lo tanto: $I = \frac{1}{2} \cdot x^2\, e^{x^2} - \int x\, e^{x^2} dx$

$$I = \frac{1}{2} \cdot x^2\, e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2}\, (x^2 - 1) + C}$$

(48) **Calcular:** $I = \int (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x}\, dx$

Pero: $I = \int x^2\, e^{-x}\, dx - 2 \int x \cdot e^{-x} \cdot dx + 5 \int e^{-x}\, dx$

$$I = \int \underbrace{x^2 e^{-x} dx}_{I_1} - 2 \int \underbrace{x \cdot e^{-x} \cdot dx}_{I_2} - 5\, e^{-x}$$

I_1 está resuelto en el ejercicio 43.

I_2 está resuelto en el ejercicio 43 parte I_1.

Por lo tanto: $I = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) - 2(-xe^{-x} - e^{-x}) - 5e^{-x} + C$

$$I = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 2e^{-x}(x + 1) - 5e^{-x} + C$$

$$I = e^{-x}(x^2 + 2x + 2 - 2x - 2 + 5) + C$$

$$\boxed{I = -e^{-x}(x^2 + 5) + C}$$

(49) ***Calcular:*** $I = \int e^{\operatorname{sen} x} \left(\frac{x \cos^3 x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \right) dx$

Dividiendo: $I = \int e^{\operatorname{sen} x} (x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos^{-2} x)\, dx$

Multiplicando y separando en dos integrales:

$$I = \underbrace{\int x e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot dx}_{I_1} - \underbrace{\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cdot \cos^{-2} x \cdot dx}_{I_2}$$

Cálculo de I_1

$u = x \qquad dv = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot dx$

$du = dx \longleftarrow v = e^{\operatorname{sen} x}$

Cálculo de I_2

$u = e^{\operatorname{sen} x} \qquad dv = \operatorname{sen} x \cdot \cos^{-2} x \cdot dx$

$v = -\frac{\cos^{-1} x}{-1}$

$du = e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx \longleftarrow v = \frac{1}{\cos x}$

Reemplazando I_1 e I_2 en I:

$$I = x e^{\operatorname{sen} x} - \int e^{\operatorname{sen} x} dx - \left[\frac{1}{\cos x} \cdot e^{\operatorname{sen} x} - \int \frac{1}{\cos x} \cdot e^{\operatorname{sen} x} \cos x \cdot dx \right]$$

$$I = x e^{\operatorname{sen} x} - \int e^{\operatorname{sen} x} dx - \frac{1}{\cos x} \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \int e^{\operatorname{sen} x} dx + C$$

$$I = x e^{\operatorname{sen} x} - \sec x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + C$$

$$\boxed{I = e^{\operatorname{sen} x} (x - \sec x) + C}$$

4.1.5 INTEGRALES POR PARTES CIRCULARES

Son aquellas que al integrar por partes, la integral original se repite. Esto nos permite despejar la integral deseada.

(50) ***Calcular:*** $I = \int e^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$

Hagamos:

$$u = e^x \qquad dv = \text{sen}\, x\, dx$$
$$du = e^x \cdot dx \qquad v = -\cos x$$

Entonces: $I = \int e^x \text{ sen } x \cdot dx = -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cdot \cos x\, dx}_{I_1}$

Cálculo de I_1 por partes:

$$u_1 = e^x \qquad dv_1 = \cos x\, dx$$
$$du_1 = e^x \cdot dx \qquad v_1 = \text{sen}\, x$$

Reemplazando en I :

$$\int e^x \text{ sen } x \cdot dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \text{ sen } x - \int e^x \text{ sen } x \cdot dx$$

$$2\int e^x \text{ sen } x \cdot dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \text{ sen } x$$

$$\boxed{\int e^x \text{ sen } x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^x (\cos x - \text{sen } x)}$$

(51) ***Calcular:*** $I = \int \sec^3 x \cdot dx$ (esta integral es muy usual)

Solución:

1) Descomponemos $\sec^3 x$ en dos factores, así: $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$

2) Ahora, integremos por partes: $I = \int \sec x \cdot \sec^2 x \cdot dx$

Haciendo:

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x \cdot dx$$
$$du = \sec x \cdot \text{tg}\, x \cdot dx \qquad v = \text{tg}\, x$$

Por lo tanto:

$$\int \sec^3 x \cdot dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec x \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot dx$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) \cdot dx$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx$$

$$\int \sec^3 x \cdot dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \cdot dx + \int \sec x \cdot dx$$

$$2 \int \sec^3 x \cdot dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{Ln} |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

$$\boxed{\int \sec^3 x \cdot dx = \tfrac{1}{2} \cdot \left[\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{Ln} |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \right]}$$

(52) ***Calcular:*** $I = \int_0^{\pi/4} e^x \operatorname{sen}(2x) dx$

Solución:

Haciendo:

$$u = e^x \qquad dv = \operatorname{sen}(2x) dx$$

$$du = e^x \cdot dx \longleftarrow v = -\tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

Entonces:

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)\, dx = -\tfrac{1}{2} \cdot e^x \cos(2x) + \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\int e^x \cos(2x)\, dx}_{I_1}$$

Integremos I_1 por partes:

$$u = e^x \qquad dv = \cos(2x) dx$$

$$du = e^x \cdot dx \longleftarrow v = \tfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(2x)$$

Por lo tanto:

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)\,dx = -\tfrac{1}{2}e^x\cos(2x) + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\cdot e^x \operatorname{sen}(2x) - \tfrac{1}{2}\cdot \int e^x \operatorname{sen}(2x)\,dx\right]$$

$$\int \underline{\underline{e^x \operatorname{sen}(2x)}}\,dx = -\tfrac{1}{2}\cdot e^x\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\cdot e^x\operatorname{sen}(2x) - \tfrac{1}{4}\cdot \int \underline{\underline{e^x \operatorname{sen}(2x)}}\,dx$$

$$\int \underline{\underline{e^x \operatorname{sen}(2x)}}\,dx + \tfrac{1}{4}\cdot \int \underline{\underline{e^x \operatorname{sen}(2x)}}\,dx = -\tfrac{1}{2}\cdot e^x\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\cdot e^x\operatorname{sen}(2x)$$

$$\tfrac{5}{4}\cdot \int_0^{\pi/4} e^x \operatorname{sen}(2x)\,dx = -\tfrac{1}{2}\cdot e^x\cos(2x) + \tfrac{1}{4}\cdot e^x\operatorname{sen}(2x)$$

$$\int_0^{\pi/4} e^x \operatorname{sen}(2x)\,dx = \tfrac{4}{5}\left[-\tfrac{1}{2}\cdot e^x\cos(2x) + \tfrac{1}{4}e^x\operatorname{sen}(2x)\right]$$

$$= \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{4}e^x\left[-2\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)\right]$$

$$= \tfrac{1}{5}\cdot e^x\left(-2\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

Luego, evaluando:

$$\int_0^{\pi/4} e^x \operatorname{sen}(2x)\,dx = \left[\tfrac{1}{5}\cdot e^{\pi/4}\left(-2\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2)\right)\right]$$

$$-\left[\tfrac{1}{5}\cdot e^0\left(-2\cos(0) + \operatorname{sen}(0)\right)\right]$$

$$= \left[\tfrac{1}{5}\cdot e^{\pi/4}(0+1)\right] - \left[\tfrac{1}{5}\cdot 1(-2+0)\right]$$

$$= \tfrac{1}{5}\cdot e^{\pi/4} + \tfrac{2}{5}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} e^x \operatorname{sen}(2x)\,dx = \tfrac{1}{5}\left(e^{\pi/4} + 2\right)}$$

(53) **Calcular:** $I = \int e^\theta \cos\theta\, d\theta$

Hagamos: $u = e^\theta$ $\qquad dv = \cos\theta\, d\theta$

$du = e^\theta \cdot d\theta \longleftarrow v = \operatorname{sen}\theta$

Entonces: $$\int e^{\theta}\cos\theta\, d\theta = e^{\theta}\operatorname{sen}\theta - \int \underbrace{e^{\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{I_1}$$

Nuevamente I_1 se integra por partes:

$$u_1 = e^{\theta} \qquad dv_1 = \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$
$$du_1 = e^{\theta} d\theta \qquad v_1 = -\cos\theta$$

Por lo tanto:

$$\int e^{\theta}\cos\theta\, d\theta = e^{\theta}\operatorname{sen}\theta - \left[-e^{\theta}\cos\theta + \int e^{\theta}\cos\theta\, d\theta \right]$$

$$\int e^{\theta}\cos\theta\, d\theta = e^{\theta}\operatorname{sen}\theta + e^{\theta}\cos\theta - \int e^{\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$2\int e^{\theta}\cos\theta\, d\theta = e^{\theta}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$$

$$\boxed{\int e^{\theta}\cos\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2} e^{\theta}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + C}$$

(54) **Calcular:** $I = \int e^{2x} \cdot \cos(3x)\, dx$

El procedimiento es similar al ejercicio 53.

Solución: $\boxed{I = \tfrac{1}{15} \cdot e^{2x} \left[3\operatorname{sen}(3x) + 2\cos(3x) + C \right]}$

(55) **Calcular:** $I = \int e^{-t}\cos(\pi t)\, dt$

Es similar al 53.

Solución: $\boxed{I = \frac{\pi}{\pi^2+1} \cdot e^{-t}\left[\operatorname{sen}(\pi t) - \tfrac{1}{\pi}\cos(\pi t) \right] + C}$

(56) **Calcular:** $I = \int e^{-x}\operatorname{sen}^2 x \cdot dx$

Haciendo: $u = \text{sen}^2 x$ $\qquad dv = e^{-x}dx$

$du = 2\text{sen}\,x \cdot \cos x\,dx$

$du = \text{sen}\,2x\,dx \qquad v = -e^{-x}$

Luego: $I = -e^{-x}\text{sen}^2 x + \underbrace{\int e^{-x}\text{sen}\,2x \cdot dx}_{I_1}$

Cálculo de I_1 por partes:

$u_1 = e^{-x} \qquad dv_1 = \text{sen}\,2x\,dx$

$du_1 = -e^{-x}dx \qquad v_1 = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x$

Por lo tanto:

(*) $\qquad I_1 = \int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-x}\cos 2x\,dx}_{I_2}$

Cálculo de I_2 por partes:

$u_2 = e^{-x} \qquad dv_2 = \cos 2x\,dx$

$du_2 = -e^{x}dx \qquad v_2 = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\,2x$

Reemplazando el resultado de I_2 en (*)

$$I_1 = \int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x}}{2} \cdot \text{sen}\,2x + \frac{1}{2}\int e^{-x} \cdot \text{sen}\,2x \cdot dx\right]$$

$$\int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{e^{-x}}{4}\text{sen}\,2x - \frac{1}{4}\int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{4} \cdot e^{-x}\,(2\cos 2x + \text{sen}\,2x)$$

$$I_1 = \int e^{-x}\,\text{sen}\,2x \cdot dx = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{-x}\,(2\cos 2x + \text{sen}\,2x)$$

$$I_1 = -\frac{1}{5} \cdot e^{-x}\,(2\cos 2x + \text{sen}\,2x) + C$$

Reemplacemos I_1 en I :

$$I = -e^{-x}\ \text{sen}^2 x - \tfrac{1}{5}\cdot e^{-x}\ (2\cos 2x + \text{sen}\, 2x) + C$$

$$\boxed{I = -\tfrac{1}{5}\, e^{-x}\ [5\ \text{sen}^2 x + (2\cos 2x + \text{sen}\, 2x)] + C}$$

(57) ***Calcular:*** $I = \int \sec^5 (3x)\, dx$

OBSERVACIÓN:
Las integrales de las funciones trigonométricas: $\sec^3 \mu$, $\sec^5 \mu$, $\sec^n \mu$; $\csc^3 \mu$, $\csc^5 \mu$, $\csc^n \mu$, con n número impar positivo, se desarrollan similar al ejercicio 51.

1) Hacer: $I = \int \sec^3 (3x) \sec^2 (3x)\, dx$

2) Ahora integremos por partes:

$u = \sec^3(3x)$ $\qquad dv = \sec^2(3x)\, dx$

$du = (3\sec^2(3x)(\sec(3x)\cdot \text{tg}(3x))(3)dx$

$du = 9\sec^3(3x)\cdot \text{tg}(3x)dx$ $\qquad v = \frac{1}{3}\cdot \text{tg}(3x)$

3) Por lo tanto:

$$I = \tfrac{1}{3}\cdot \text{tg}\,(3x)\cdot \sec^3 (3x) - 3 \int \sec^3 (3x)\cdot \text{tg}^2 (3x)\, dx$$

$$I = \tfrac{1}{3}\cdot \text{tg}\,(3x)\cdot \sec^3 (3x) - 3 \int \sec^3 (3x)\cdot [\sec^2 (3x) - 1]\, dx$$

$$I = \tfrac{1}{3}\cdot \text{tg}(3x)\cdot \sec^3(3x) - 3 \int \sec^5(3x)\, dx + 3 \underbrace{\int \sec^3(3x)\, dx}_{I_1} \quad \text{.........} \quad \text{(i)}$$

Cálculo de I_1 es similar al ejercicio 51: $I_1 = \int \sec^3 (3x)\, dx$

Hacer: $I_1 = \int \underbrace{\sec(3x)}_{u_1} \cdot \underbrace{\sec^2 (3x)\, dx}_{dv_1}$

Haciendo: $u_1 = \sec(3x)$ $\qquad dv_1 = \sec^2(3x)dx$

$du_1 = 3\sec(3x)\cdot \text{tg}(3x)dx$ $\qquad v_1 = \frac{1}{3}\cdot \text{tg}(3x)$

Entonces:

$$I_1 = \int \sec^3(3x)\,dx = \tfrac{1}{3}\cdot\sec(3x)\,\text{tg}(3x) - \int \sec(3x)\,\text{tg}^2(3x)\cdot dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\sec(3x)\,\text{tg}(3x) - \int \sec(3x)\,[\sec^2(3x)-1]\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\sec(3x)\,\text{tg}(3x) - \int \sec^3(3x)\,dx + \int \sec(3x)\,dx$$

$$2\int \sec^3(3x)\,dx = \tfrac{1}{3}\cdot\sec(3x)\,\text{tg}(3x) + \tfrac{1}{3}\,\text{Ln}\left|\sec(3x)+\text{tg}(3x)\right|$$

Dividiendo por 2:

$$I_1 = \int \sec^3(3x)\,dx = \tfrac{1}{6}\cdot\sec(3x)\,\text{tg}(3x) + \tfrac{1}{6}\,\text{Ln}\left|\sec(3x)+\text{tg}(3x)\right|$$

Reemplacemos el resultado de I_1 en 3) (i):

$$I = \tfrac{1}{3}\cdot\text{tg}(3x)\sec^3(3x) - 3\int \sec^5(3x) +$$

$$3\left[\tfrac{1}{6}\cdot\sec(3x)\,\text{tg}(3x) + \tfrac{1}{6}\,\text{Ln}\left|\sec(3x)+\text{tg}(3x)\right|\right]$$

$$\int \underline{\underline{\sec^5(3x)}}\,dx = \tfrac{1}{3}\cdot\text{tg}(3x)\sec^3(3x) - 3\int \underline{\underline{\sec^5(3x)}} + \tfrac{1}{2}\cdot\sec(3x)\,\text{tg}(3x) +$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\text{Ln}\left|\sec(3x)+\text{tg}(3x)\right|$$

$$\boxed{\int \sec^5(3x)\,dx = \tfrac{1}{12}\cdot\text{tg}(3x)\sec^3(3x) + \tfrac{1}{8}\cdot\text{tg}(3x)\sec(3x) + \tfrac{1}{8}\cdot Ln\left|\sec(3x)+\text{tg}(3x)\right| + C}$$

(58) ***Calcular:*** $I = \int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx$

Hagamos: $u = e^{ax}$ $\qquad dv = \cos(bx)\,dx$

$du = a\cdot e^{ax}\,dx \longleftarrow v = \tfrac{1}{b}\,\text{sen}(bx)$

Entonces: $I = \frac{1}{b} \cdot e^{ax} \text{ sen }(bx) - \frac{a}{b} \cdot \underbrace{\int e^{ax} \cdot \text{sen }(bx)\, dx}_{I_1}$

Cálculo de I_1 por partes:

$$u_1 = e^{ax} \qquad dv_1 = \text{sen}(bx)dx$$

$$du_1 = a \cdot e^{ax} \cdot dx \qquad v_1 = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx)$$

Reemplazando este resultado en I_1:

$$I = \frac{1}{b} \cdot e^{ax} \text{ sen }(bx) - \frac{a}{b} \cdot \left[-\frac{1}{b} \cdot e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \cdot \int e^{ax} \cos(bx)\, dx \right]$$

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \text{ sen }(bx) + \frac{a}{b^2} \cdot e^{ax} \cos(bx) - \frac{a^2}{b^2} \cdot \int e^{ax} \cos(bx)\, dx$$

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx + \frac{a^2}{b^2} \cdot \int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{b^2} \cdot \left[be^{ax} \text{ sen }(bx) + a\, e^{ax} \cos(bx) \right]$$

$$\left[1 + \frac{a^2}{b^2} \right] \int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{b^2} e^{ax} \left[b \text{ sen }(bx) + a \cos(bx) \right]$$

$$\left[\frac{b^2 + a^2}{b^2} \right] \int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{b^2} e^{ax} \left[b \text{ sen }(bx) + a \cos(bx) \right]$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} \left[b \text{ sen }(bx) + a \cos(bx) \right] + C}$$

(59) ***Calcular:*** $I = \int e^{ax} \text{ sen }(bx)\, dx$

Solución: $\boxed{I = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} \left[a \text{ sen }(bx) - b \cos(bx) \right] + C}$

(60) **Calcular:** $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\, dx$

Solución: $I = 2\left[\frac{(1+x)^{5/2}}{5} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + (1+x)^{1/2} \right] + C$

(61) **Calcular:** $I = \int e^{-t} \cos(\pi t)\, dt$

Solución: $I = \frac{1}{\pi^2+1} e^{-t} \left[\pi \operatorname{sen}(\pi t) - \cos(\pi t) \right] + C$

(62) **Calcular:** $I = \int e^{2x} \operatorname{sen}(x)\, dx$

Solución: $I = \frac{1}{5} e^{2x} \left(2 \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \right) + C$

(63) **Calcular:** $I = \int e^{x} \cos(3x)\, dx$

Solución: $I = \frac{3}{10} e^{x} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{10} \cdot e^{x} \cos(3x) + C$

(64) **Calcular:** $I = \int \operatorname{cosec}^3(x)\, dx$

Solución: $I = \frac{1}{2}\left[-\operatorname{cosec}(x) \operatorname{cotg}(x) + \operatorname{Ln} \left| \operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x \right| \right] + C$

5. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

5.1. INTEGRALES DEL TIPO $I_{mn} = \int \text{sen}^m u \cdot \cos^n u \cdot du$

CASOS:

1er. CASO

Cuando " $m \vee n$ " sean un número ***ENTERO IMPAR POSITIVO****, no importa lo que sea el otro exponente.*

Es decir puede ocurrir cualquiera de las siguientes alternativas:

A) $m = \text{impar} \in \mathbb{Z}^+ \ \wedge \ n \in Q$ .... $\mathbb{Z}^+ =$ números enteros positivos

B) $n = \text{impar} \in \mathbb{Z}^+ \ \wedge \ m \in Q$ .... $Q =$ números racionales

C) $m \wedge n$ son números enteros impares positivos.

MÉTODOS A SEGUIR

Paso 1

El de potencia **IMPAR**, se descompone como el producto de dos factores, tal que, el primer factor tenga **POTENCIA UNO** y el segundo factor tendrá potencia, la diferencia (que será par).

Paso 2

El segundo factor, que tiene potencia par, se expresa (según el caso) en función de una de las siguientes identidades:

$$\text{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$$
$$\cos^2 u = 1 - \text{sen}^2 u$$

Paso 3

Después de las operaciones anteriores, las integrales que se obtienen son fáciles de calcular, puesto que son la inmediata aplicación de la fórmula:

$$\boxed{\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C} \qquad n \neq 1$$

En la alternativa c) se tiene que: si $m \wedge n$ son enteros impares positivos, entonces se prefiere trabajar con aquel factor que tenga la **menor potencia impar**.

Veamos la forma general en que debemos proceder:

A) Si $m = 2k+1$ (impar) para todo $k \in \mathbb{Z}^+$

La integral $I = \int \operatorname{sen}^{2k+1} u \cdot \cos^n u \cdot du$ se descompone en:

$$I = \int \underline{\underline{\operatorname{sen} u}} \cdot \underline{\operatorname{sen}^{2k} u} \cdot \cos^n u \cdot du$$

Factor de potencia PAR

Factor de potencia UNO

$$I = \int \operatorname{sen} u \cdot (\operatorname{sen}^2 u)^k \cdot \cos^n u \cdot du$$

$$I = \int \operatorname{sen} u \cdot (1 - \cos^2 u)^k \cdot \cos^n u \cdot du$$

Desarrollando $(1 - \cos u)^k$ y multiplicando por $\cos^n u$, obtenemos integrales inmediatos que serán potencias del $\cos u$.

B) Si $n = 2k+1$ (impar) para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

La integral:

$I = \int \operatorname{sen}^m u \cdot \cos^{2k+1} u \cdot du$, se descompone en:

$$I = \int \text{sen}^m u \cdot \cos^{2k} u \cdot \cos u \cdot du$$

$$I = \int \text{sen}^m u \cdot (\cos^2 u)^k \cdot \cos u \cdot du$$

$$I = \int \text{sen}^m u \cdot (1 - \text{sen}^2 u)^k \cdot \cos u \cdot du$$

Desarrollando $(1 - \text{sen}^2 u)^k$ y multiplicando por $\text{sen}^m u$, obtendremos integrales que serán potencias de $\text{sen} u$

Ejemplos:

(65) **Calcular:** $I = \int \text{sen}^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

Solución: La función $\text{sen}^2 x$ descomponer en $\text{sen} x \, \text{sen}^2 x$:

$$I = \int \underline{\text{sen}\, x} \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$I = \int \underline{\text{sen}\, x} \cdot (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \cdot dx$$

$$I = \int \underline{\text{sen}\, x} \cdot \cos^2 x \cdot dx - \int \underline{\text{sen}\, x} \cdot \cos^4 x \cdot dx$$

$$\boxed{I = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C}$$

(66) **Calcular:** $I = \int \text{sen}^3 (2x) \cdot \cos^5 (2x)\, dx$

Solución: La función $\text{sen}^3(2x)$ descomponer en $\text{sen}(2x)\, \text{sen}^2(2x)$.

$$I = \int \underline{\underline{\text{sen}^3(2x)}} \cdot \cos^5(2x) \cdot dx$$

Trabajamos con este factor por tener la menor potencia IMPAR

$$I = \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{sen}^2(2x) \cdot \cos^5(2x)\, dx$$

$$I = \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \left(1 - \cos^2(2x)\right) \cdot \cos^5(2x)\, dx$$

$$I = \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \cos^5(2x)\, dx - \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \cos^7(2x) \cdot dx$$

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^6(2x)}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\cos^8(2x)}{8} + C$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{12} \cdot \cos^6(2x) + \frac{1}{16} \cdot \cos^8(2x) + C}$$

(67) **Calcular:** $I = \int \cos^3(3x) \cdot \operatorname{sen}^7(3x)\, dx$

Solución: La función $\cos^3(3x)$ se descompone en $\cos(3x)\cos^2(3x)$:

$$I = \int \underline{\cos(3x)} \cdot \cos^2(3x) \cdot \operatorname{sen}^7(3x)\, dx$$

$$I = \int \cos(3x) \cdot \left(1 - \operatorname{sen}^2(3x)\right) \cdot \operatorname{sen}^7(3x)\, dx$$

$$I = \int \cos(3x) \cdot \operatorname{sen}^7(3x)\, dx - \int \cos(3x) \cdot \operatorname{sen}^9(3x)\, dx$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}^8(3x)}{8} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}^{10}(3x)}{10} + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{24} \cdot \operatorname{sen}^3(3x) - \frac{1}{30} \operatorname{sen}^{10}(3x) + C}$$

(68) **Calcular:** $I = \int \frac{\operatorname{sen}^5(2x)}{\cos^2(2x)} \cdot dx$

Solución: La función $\operatorname{sen}^5(2x)$ se descompone en $\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}^4(2x)$.

$$I = \int \operatorname{sen}^5(2x) \cdot \cos^{-2}(2x) \cdot dx$$

$$I = \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \operatorname{sen}^4(2x) \cdot \cos^{-2}(2x)\, dx$$

$$I = \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \left(\operatorname{sen}^2(2x) \right)^2 \cdot \cos^{-2}(2x)\, dx$$

$$I = \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \left(1 - \cos^2(2x) \right)^2 \cdot \cos^{-2}(2x) \cdot dx$$

$$I = \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \left(1 - 2\cos^2(2x) + \cos^4(2x) \right) \cdot \cos^{-2}(2x)\, dx$$

$$I = \int \operatorname{sen}(2x)\cos^{-2}(2x)\, dx - 2\int \operatorname{sen}(2x)\, dx + \int \operatorname{sen}(2x) \cdot \cos^2(2x)\, dx$$

$$I = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{\cos^{-1}(2x)}{-1} - 2\left(-\tfrac{1}{2} \cdot \cos(2x) \right) - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\cos^3(2x)}{3} + C$$

$$I = \tfrac{1}{2} \cdot \sec(2x) + \cos(2x) - \tfrac{1}{6} \cdot \cos^3(2x) + C$$

(69) **Calcular:** $I = \int \frac{\cos^5\theta}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}\theta}} \cdot d\theta$

Solución: La función $\cos^5(\theta)$ se descompone en $\cos(\theta)\cos^4(\theta)$.

$$I = \int \cos^5\theta \cdot \operatorname{sen}^{-1/3}\theta \cdot d\theta$$

$$I = \int \cos\theta \cdot \cos^4\theta \cdot \operatorname{sen}^{-1/3}\theta \cdot d\theta$$

$$I = \int \cos\theta \cdot (\cos^2\theta)^2 \cdot \operatorname{sen}^{-1/3}\theta \cdot d\theta$$

$$I = \int \cos\theta \cdot (1 - \operatorname{sen}^2\theta)^2 \cdot \operatorname{sen}^{-1/3}\theta \cdot d\theta$$

$$I = \int \cos\theta \cdot (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta) \cdot \operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}}\theta \cdot d\theta$$

$$I = \int \cos\theta \cdot \operatorname{sen}^{-1/3}\theta\, d\theta - 2\int \cos\theta\, \operatorname{sen}^{\frac{5}{3}}\theta\, d\theta + \int \cos\theta\, \operatorname{sen}^{\frac{11}{3}}\theta\, d\theta$$

$$I = +\tfrac{3}{2}\operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}}\theta - \tfrac{3}{4}\operatorname{sen}^{\frac{8}{3}}\theta + \tfrac{3}{14}\operatorname{sen}^{\frac{14}{3}}\theta + C$$

(70) **Calcular:** $I = \int \operatorname{sen}^3 2\theta \cdot \cos^5 2\theta\, d\theta$

Solución: Descomponer $\operatorname{sen}^3(2\theta) = \operatorname{sen}(2\theta) \cdot \operatorname{sen}^2(2\theta)$

$$I = \int \text{sen}\, 2\theta\, \text{sen}^2\, 2\theta \cos^5 2\theta\, d\theta = \int \text{sen}\, 2\theta\, (1 - \cos^2 2\theta) \cos^5 2\theta\, d\theta$$

$$I = \int \text{sen}\, 2\theta \cos^5 2\theta\, d\theta - \int \text{sen}\, 2\theta \cos^7 \cdot 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{2} \frac{\cos^6 2\theta}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^8 2\theta}{8}$$

$$I = -\frac{1}{12} \cos^6 2\,\theta + \frac{1}{16} \cos^8 2\theta + C$$

(71) **Calcular:** $I = \int \cos^5 3\theta\, \text{sen}^7\, 3\theta\, d\theta$

Solución: La función $\cos^5 3\theta$ se descompone en $\cos(3\theta) \cdot \cos^4 3\theta$.

$$I = \int \cos 3\theta \cos^4 3\theta\, \text{sen}^7\, 3\theta\, d\theta = \int \cos 3\theta\, (1 - \text{sen}^2\, 3\theta)^2\, \text{sen}^7\, 3\theta\, d\theta$$

$$I = \int \cos 3\theta\, (1 - 2\, \text{sen}^2\, 3\theta + \text{sen}^4\, 3\theta)\, \text{sen}^7\, 3\theta\, d\theta$$

$$= \int \cos 3\theta\, \text{sen}^7\, 3\theta\, d\theta - 2 \int \cos 3\theta\, \text{sen}^9\, 3\theta\, d\theta + \int \cos 3\theta\, \text{sen}^{11}\, 3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\text{sen}^8\, 3\,\theta}{8} - 2\, \frac{1}{3} \frac{\text{sen}^{10}\, 3\,\theta}{10} + \frac{1}{3} \frac{\text{sen}^{12}\, 3\,\theta}{12} + C$$

$$I = \frac{1}{24} \text{sen}^8\, 3\,\theta - \frac{1}{15} \text{sen}^{10}\, 3\,\theta + \frac{1}{36} \text{sen}^{12}\, 3\,\theta + C$$

(72) **Calcular:** $I = \int \text{sen}^3\, 5x\, dx$

Solución: La función $\text{sen}^3 5x$ se descompone en $\text{sen} 5x \cdot \text{sen}^2 5x$.

$$I = \int \text{sen}\, 5x \cdot \text{sen}^2\, 5x\, dx = \int \text{sen}\, 5x\, (1 - \cos^2 5x)\, dx$$

$$= \int \text{sen}\, 5x\, dx - \int \text{sen}\, 5x \cos^2 5x\, dx$$

$$I = \frac{1}{5}(-\cos 5x) - \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{\cos^3 5x}{3} + C$$

$$I = -\frac{1}{5} \cos 5x + \frac{1}{15} \cos^3 5x + C$$

(73) **Calcular:** $I = \int \cos^3 2x\, dx$

Solución: Descomponer $\cos^3(2x)$ en $\cos(2x)\cdot\cos^2(2x)$

$$I = \int \cos 2x \cos^2 2x\, dx = \int \cos 2x\,(1-\text{sen}^2\, 2x)\, dx$$

$$= \int \cos 2x\, dx - \int \cos 2x\, \text{sen}^2\, 2x\, dx$$

$$I = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x - \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{sen}^3\, 2x}{3} + C$$

$$I = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x - \tfrac{1}{6}\,\text{sen}^3\, 2x + C$$

(74) **Calcular:** $I = \int \text{sen}^5\, x\, dx$

Solución: Hacer $\text{sen}^5 x = \text{sen}\, x \cdot \text{sen}^4 x$

$$I = \int \text{sen}\, x\, \text{sen}^4\, x\, dx = \int \text{sen}\, x\,(\text{sen}^2\, x)^2\, dx = \int \text{sen}\, x\,(1-\cos^2 x)^2\, dx$$

$$= \int \text{sen}\, x\,(1-2\cos^2 x + \cos^4 x)\, dx$$

$$= \int \text{sen}\, x\, dx - 2\int \text{sen}\, x \cos^2 x\, dx + \int \text{sen}\, x \cos^4 x\, dx$$

$$= -\cos x - 2\left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right) - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

$$I = -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x - C$$

(75) **Calcular:** $I = \int \text{sen}^7\, 3x\, dx$

Solución: Descomponer $\text{sen}^7 3x$ en $\text{sen} 3x \cdot \text{sen}^6 3x$

$$I = \int \cos 3x \cos^6 3x\, dx = \int \cos 3x\,(\cos^2 3x)^3\, dx = \int \cos 3x\,(1-\text{sen}^2\, 3x)^3\, dx$$

$$= \int \cos 3x\,(1 - 3\,\text{sen}^2\, 3x + 3\,\text{sen}^4\, 3x - \text{sen}^6\, 3x)\, dx$$

$$= \int \cos 3x\, dx - 3\int \cos 3x\, \text{sen}^2\, 3x\, dx + 3\int \cos 3x\, \text{sen}^4\, 3x\, dx - \int \cos 3x\, \text{sen}^6\, 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{sen}\,3x - 3\,\frac{1}{3}\,\frac{\text{sen}^3 3x}{3} + 3\,\frac{1}{3}\,\frac{\text{sen}^5 3x}{5} - \frac{1}{3}\,\frac{\text{sen}^7 3x}{7} + C$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{sen}\,3x - \frac{1}{3}\,\text{sen}^3 3x + \frac{1}{5}\,\text{sen}^5 3x - \frac{1}{21}\,\text{sen}^7 3x + C$$

(76) **Calcular:** $I = \int \text{sen}^5 x\, dx$

Solución: Descomponer $\text{sen}^5 x$ en $\text{sen}\,x \cdot \text{sen}^4 x$

$$I = \int \text{sen}\,x\,\text{sen}^4 x\, dx$$

$$I = \int \text{sen}\,x\,(\text{sen}^2 x)^2\, dx$$

$$I = \int \text{sen}\,x\,(1 - \cos^2 x)^2\, dx$$

$$I = \int \text{sen}\,x\,(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\, dx$$

$$I = \int \text{sen}\,x\, dx - 2\int \text{sen}\,x\cos^2 x\, dx + \int \text{sen}\,x\cos^4 x\, dx$$

$$I = -\cos x - 2\left(\frac{-\cos^3 x}{3}\right) - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

$$I = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

2do. CASO Sea $I = \int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$

Si m y n son pares positivos, entonces se hace una transformación usando las fórmulas:

$$\text{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\text{sen}\,u \cdot \cos u = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2u$$

Ejemplos:

(77) **Calcular:** $I=\int \text{sen}^2 x\,dx$

Solución:

$$I=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\text{sen }2x$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\text{sen }2x+C$$

(78) **Calcular:** $I=\int \cos^2 x\,dx$

Solución:

$$I=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\text{sen}2x)+C$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\text{sen}2x+C$$

(79) **Calcular:** $I=\int \text{sen}^4 2x\,dx$

Solución:

$$I=\int(\text{sen}^2 2x)^2dx$$
$$=\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2dx$$
$$=\int\frac{1}{4}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 4x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos^2 4x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\text{sen}4x+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1+\cos 8x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\text{sen}4x+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 8x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\text{sen}4x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\text{sen}8x+C$$
$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}\text{sen}4x+\frac{1}{64}\text{sen}8x+C$$

(80) **Calcular:** $I=\int\cos^6 3x\,dx$

Solución:

$$I=\int(\cos^2 3x)^3dx$$
$$=\int\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^3dx$$
$$=\frac{1}{8}\int(1+3\cos 6x+3\cos^2 6x+\cos^3 6x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{3}{8}\int \cos 6x\, dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 6x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x + \frac{3}{8}\int\left(\frac{1+\cos 12x}{2}\right)dx + \frac{1}{8}\int \cos 6x \cos^2 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 6x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{16}\int \cos 12\, x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 6x\,(1-\operatorname{sen}^2 6x)\, dx$$

$$= \underline{\frac{1}{8}}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 6x + \underline{\frac{3}{16}}x + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{12}\operatorname{sen} 12x + \frac{1}{8}\int \cos 6x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos 6x \operatorname{sen}^2 6x\, dx$$

$$= \frac{5}{16}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 12\, x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3 6x}{3} + C$$

$$= \frac{5}{16}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 12\, x + \frac{1}{48}\operatorname{sen} 6x - \frac{1}{144}\operatorname{sen}^3 6x + C$$

(81) **Calcular:** $I = \int \operatorname{sen}^4 5x \cos^2 5x\, dx$

Solución:

$$I = \int (\operatorname{sen}^2 5x \cdot \cos^2 5x) \operatorname{sen}^2 5x\, dx$$

$$= \int (\operatorname{sen} 5x \cdot \cos 5x)^2 \operatorname{sen}^2 5x\, dx$$

$$= \int \left(\frac{\operatorname{sen} 10\, x}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 10x}{2}\right) dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2 10x}{4}\left(\frac{1-\cos 10x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 10x\, dx - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 10x \cos 10x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\frac{1-\cos 20x}{2}\right)dx - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3 10x}{3}$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\int \cos 20x\, dx - \frac{1}{240}\operatorname{sen}^3 10x$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{20}\operatorname{sen} 20x - \frac{1}{240}\operatorname{sen}^3 10x + C$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{320}\operatorname{sen} 20x - \frac{1}{240}\operatorname{sen}^3 10x + C$$

(82) Calcular:

$$I=\int \cos^4 \tfrac{x}{2}\cdot \operatorname{sen}^2 \tfrac{x}{2}\cdot dx$$

Solución:

$$I=\int\left(\cos^2 \tfrac{x}{2}\cdot \operatorname{sen}^2 \tfrac{x}{2}\right)\cos^2 \tfrac{x}{2}\,dx$$

$$=\int\left(\cos \tfrac{x}{2}\cdot \operatorname{sen} \tfrac{x}{2}\right)^2\cos^2 \tfrac{x}{2}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)dx$$

$$=\tfrac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx+\tfrac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$$

$$=\tfrac{1}{8}\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C$$

$$=\tfrac{1}{16}x-\tfrac{1}{16}\int \cos 2x\,dx+\tfrac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x+C$$

$$=\tfrac{1}{16}x-\tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+\tfrac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x+C$$

$$=\tfrac{1}{16}x-\tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 2x+\tfrac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x+C$$

(83) Calcular:

$$I=\int (2-\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta$$

Solución:

$$I=\int (4-4\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta$$

$$=4\int d\theta-4\int \operatorname{sen}\theta\,d\theta+\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$=4\theta-4(-\cos\theta)+\int\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=4\theta+4\cos\theta+\tfrac{1}{2}\theta-\tfrac{1}{2}\int \cos 2\theta\,d\theta$$

$$=4\theta+4\cos\theta+\tfrac{1}{2}\theta-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta+C$$

$$=\tfrac{9}{2}\theta+4\cos\theta-\tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta+C\,.$$

(84) Calcular: $I=\int \operatorname{sen}^2 ax\cdot\cos^2 ax\,dx$

Solución:

$$I=\int (\operatorname{sen} ax\cdot\cos ax)^2\,dx=\int\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2ax\right)^2 dx=\tfrac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2ax\,dx$$

$$=\tfrac{1}{4}\int\left(\frac{1-\cos 4ax}{2}\right)dx=\tfrac{1}{8}\int dx-\tfrac{1}{8}\int \cos 4ax\,dx$$

$$=\tfrac{1}{8}x-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{4a}\operatorname{sen} 4ax+C$$

$$=\tfrac{1}{8}x-\frac{1}{32a}\operatorname{sen} 4ax+C$$

(85) **Calcular:** $I = \int \left(\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta} - \cos 2\theta \right)^2 d\theta$

Solución:

$$I = \int \left(\operatorname{sen} 2\theta - 2\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta} \cdot \cos 2\theta + \cos^2 2\theta \right) d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta - 2 \int \cos 2\theta \, (\operatorname{sen} 2\theta)^{1/2} \, d\theta + \int \cos^2 2\theta \, d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cos 2\theta - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(\operatorname{sen} 2\theta)^{3/2}}{3/2} + \int \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \, d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cos 2\theta - \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}^{3/2} 2\theta + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2} \int \cos 4\theta \, d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cos 2\theta - \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}^{3/2} 2\theta + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \operatorname{sen} 4\theta + C$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cos 2\theta - \tfrac{2}{3} \operatorname{sen}^{3/2} 2\theta + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{8} \operatorname{sen} 4\theta + C$$

(86) **Calcular:** $I = \int \operatorname{sen}^4 2\theta \cdot \cos^4 2\theta \, d\theta$

Solución:

$$I = \int (\operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta)^4 \, d\theta$$

$$= \int \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 4\theta \right)^4 d\theta$$

$$= \tfrac{1}{16} \int \operatorname{sen}^4 4\theta \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{16} \int (\operatorname{sen}^2 4\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cos 8\theta}{2} \right)^2 d\theta = \tfrac{1}{64} \int (1 - 2\cos 8\theta + \cos^2 8\theta) \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{64}\theta - \tfrac{2}{64} \int \cos 8\theta \, d\theta + \tfrac{1}{64} \int \cos^2 8\theta \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{64}\theta - \tfrac{2}{64} \cdot \tfrac{1}{8} \operatorname{sen} 8\theta + \tfrac{1}{64} \int \left(\frac{1 + \cos 16\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{64}\theta - \frac{2}{256}\operatorname{sen} 8\theta + \frac{1}{128}\theta + \frac{1}{128}\int \cos 16\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{128}\theta - \frac{1}{256}\operatorname{sen} 8\theta + \frac{1}{128}\cdot\frac{1}{16}\operatorname{sen} 16\theta + C$$

$$= \frac{3}{64}\theta - \frac{1}{256}\operatorname{sen} 8\theta + \frac{1}{2048}\operatorname{sen} 16\theta + C$$

5.2. INTEGRALES DE LAS FORMAS

1. $\int \operatorname{sen} Ax \cdot \cos Bx \, dx =$

2. $\int \operatorname{sen} Ax \cdot \operatorname{sen} Bx \, dx =$

3. $\int \cos Ax \cdot \cos Bx \, dx =$

Para estos casos se usa las transformaciones siguientes:

Para 1 $\operatorname{sen} Ax \cdot \cos Bx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B)x + \operatorname{sen}(A-B)x]$

Para 2 $\operatorname{sen} Ax \cdot \operatorname{sen} Bx = \frac{1}{2}[\cos(A-B)x - \cos(A+B)x]$

Para 3 $\cos Ax \cdot \cos Bx = \frac{1}{2}[\cos(A+B)x + \cos(A-P)x]$

Ejemplos:

(87) **Calcular:** $I = \int \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 4x \, dx$

Solución

$$I = \int \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 4x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(2x+4x) + \operatorname{sen}(2x-4x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 6x \, dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(-2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(-\cos 6x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)((-\cos(-2x))dx$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos(2x) + C, \; \cos(-2x) = \cos 2x$$

(88) **Calcular:** $I = \int \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} 2x \, dx$

Solución:

$$I = \int \frac{1}{2}[\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 5x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x + C$$

(89) Calcular:

$$I = \int \cos 4x \cdot \cos 3x \, dx$$

Solución:

$$I = \int \cos 4x \cdot \cos 3x \, dx$$

$$= \int \tfrac{1}{2}[\cos(4x+3x) + \cos(4x-3x)]dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \cos 7x \, dx + \tfrac{1}{2}\int \cos x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{7} \operatorname{sen} 7x + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x + C$$

$$= \tfrac{1}{14} \operatorname{sen} 7x + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x + C$$

(90) Calcular:

$$I = \int \cos 5x \cos 8x \, dx$$

Solución:

$$I = \int \cos 5x \cdot \cos 8x \, dx$$

$$= \int \tfrac{1}{2}[\cos(5x+8x) + \cos(5x-8x)]dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \cos 13x \, dx + \tfrac{1}{2}\int \cos(-3x) \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{13} \operatorname{sen} 13x + \tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) \operatorname{sen}(-3x) + C$$

$$= \tfrac{1}{26} \operatorname{sen} 13x - \tfrac{1}{6} \operatorname{sen}(-3x) + C$$

$$= \tfrac{1}{26} \operatorname{sen} 13x + \tfrac{1}{6} \operatorname{sen} 3x + C$$

Nota: $\operatorname{sen}(-3x) = -\operatorname{sen}(3x)$
$\cos(-3x) = \cos(3x)$

5.3. INTEGRALES DE LA FORMA $\int \operatorname{tg}^n u \, du$ ó $\int \operatorname{ctg}^n u \, du$

Cuando "n" es un número entero positivo, se procede del siguiente modo:
El primer paso, es descomponer la potencia $\operatorname{tg}^3 u$ (o $\operatorname{ctg}^n u$) en dos factores, de tal modo que el primer factor debe ser siempre $\operatorname{tg}^2 u$ (o $\operatorname{ctg}^2 u$).

El segundo paso, es hacer la sustitución:

$$\operatorname{tg}^2 u = \operatorname{sen}^2 u - 1$$

o

$$\operatorname{ctg}^2 u = \csc^2 u - 1$$

El tercer paso, es multiplicar e integrar.

Es decir:

	$I=\int \operatorname{tg}^n u\,du$	$I=\int c\operatorname{tg}^n u\,du$
1er Paso	$=\int \operatorname{tg}^2 u\operatorname{tg}^{n-2} u\,du$	$=\int \operatorname{ctg}^2 u\cdot\operatorname{ctg}^{n-2} u\,du$
2do Paso	$=\int (\sec^2 u-1)\operatorname{tg}^{n-2} u\,du$	$=\int (\csc^2 u-1)\operatorname{ctg}^{n-2} u\,du$
3er Paso	$=\int \sec^2 u\cdot\operatorname{tg}^{n-2} u\,du-\int \operatorname{tg}^{n-2} u\,du$	$=\int \csc^2 u\cdot\operatorname{ctg}^{n-2} u\,du-\int \operatorname{ctg}^{n-2} u\,du$

Ejemplos:

(91) **Calcular:** $I=\int \operatorname{tg}^4\theta\,d\theta$

Solución:

$$I=\int \operatorname{tg}^4\theta\,d\theta$$
$$=\int \operatorname{tg}^2\theta\operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$$
$$=\int (\sec^2\theta-1)\operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$$
$$=\int \sec^2\theta\operatorname{tg}^2\theta\,d\theta-\int \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3}-\int (\sec^2\theta-1)\,d\theta$$
$$=\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta-\int \sec^2\theta\,d\theta+\int d\theta$$
$$=\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\theta-\operatorname{tg}\theta+\theta+C$$

(92) **Calcular:** $I=\int \operatorname{tg}^5 2x\,dx$

Solución:

$$I=\int \operatorname{tg}^5 2x\,dx$$
$$=\int \operatorname{tg}^2 2x\cdot\operatorname{tg}^3 2x\,dx$$
$$=\int (\sec^2 2x-1)\operatorname{tg}^3 2x\,dx$$
$$=\int \sec^2 2x\cdot\operatorname{tg}^3 2x\,dx-\int \operatorname{tg}^3 2x\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^4 2x}{4}-\int \operatorname{tg}^2 2x\cdot\operatorname{tg} 2x\,dx$$
$$=\tfrac{1}{8}\cdot\operatorname{tg}^4 2x-\int (\sec^2 2x-1)\operatorname{tg}2x\,dx$$
$$=\tfrac{1}{8}\cdot\operatorname{tg}^4 2x-\int \sec^2 2x\cdot\operatorname{tg}2x\,dx+\int \operatorname{tg}2x\,dx$$
$$=\tfrac{1}{8}\cdot\operatorname{tg}^4 2x-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{2}+\tfrac{1}{2}\operatorname{Ln}|\sec 2x|$$
$$=\tfrac{1}{8}\cdot\operatorname{tg}^4 2x-\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x+\tfrac{1}{2}\operatorname{Ln}|\sec 2x|+C$$

93 **Calcular:** $I = \int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3} dx$

Solución:

$$I = \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3} dx$$

$$= \int \left(\csc^2 \frac{x}{3} - 1 \right) \operatorname{ctg} \frac{x}{3} \cdot dx$$

$$= \int \csc^2 \frac{x}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \int \operatorname{ctg} \frac{x}{3} dx$$

$$= -3 \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3}}{2} - 3 \operatorname{Ln}|\operatorname{sen} \frac{x}{3}| + C$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3} - 3 \operatorname{Ln}|\operatorname{sen} \frac{x}{3}| + C$$

94 **Calcular:** $I = \int \operatorname{ctg}^5 ax\, dx$

Solución:

$$I = \int \operatorname{ctg}^5 ax\, dx$$

$$= \int \operatorname{ctg}^2 ax \cdot \operatorname{ctg}^3 ax\, dx$$

$$= \int (\csc^2 ax - 1) \operatorname{ctg}^3 ax\, dx$$

$$= \int \csc^2 ax \cdot \operatorname{ctg}^3 ax\, dx - \int \operatorname{ctg}^3 ax\, dx$$

$$= -\frac{1}{a} \frac{\operatorname{ctg}^4 ax}{4} - \int (\csc^2 ax - 1) \operatorname{ctg} ax\, dx$$

$$= \frac{-1}{a} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^4 ax}{4} - \int \csc^2 ax \cdot \operatorname{ctg} ax + \int \operatorname{ctg} ax\, dx$$

$$= -\frac{1}{4a} \operatorname{ctg}^4 ax - \left(-\frac{1}{a}\right) \frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2}$$

$$+ \frac{1}{a} \cdot \operatorname{Ln}|\operatorname{sen} ax|$$

$$= -\frac{1}{4a} \operatorname{ctg}^4 ax + \frac{1}{2a} \cdot \operatorname{ctg}^2 ax$$

$$+ \frac{1}{a} \cdot \operatorname{Ln}|\operatorname{sen} ax| + K$$

95 **Calcular:** $I = \int \operatorname{ctg}^4 3\theta\, d\theta$

Solución:

$$I = \int \operatorname{ctg}^4 3\theta\, d\theta = \int \operatorname{ctg}^2 3\theta \cdot \operatorname{ctg}^2 3\theta\, d\theta$$

$$= \int (\csc^2 3\theta - 1) \operatorname{ctg}^2 3\theta\, d\theta$$

$$= \int \csc^2 3\theta \cdot \operatorname{ctg}^2 3\theta\, d\theta - \int \operatorname{ctg}^2 3\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^3 3\theta}{3} - \int (\csc^2 3\theta - 1) d\theta$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \operatorname{ctg}^3 3\theta - \int \csc^2 3\theta\, d\theta + \int d\theta$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \operatorname{ctg}^3 3\theta - \left(\frac{1}{3}\right)(-\operatorname{ctg} 3\theta) + \theta + K$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \operatorname{ctg}^3 3\theta + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{ctg} 3\theta + \theta + K$$

5.4. INTEGRALES DE LA FORMA $\int \sec^n u du$ o $\int \csc^n u du$

CASOS:

CASO I Si n es un número entero impar positivo, entonces se recurre a la Integración por partes.

CASO II Si n es un número entero par positivo, entonces la potencia $\sec^n u$ (ó $\csc^n u$) se expresa como el producto de dos factores, de tal forma, que el primer factor sea $\sec^2 u$ (ó $\csc^2 u$) y el segundo factor $\sec^{n-2} u$ (ó $\csc^{n-2} u$) se expresa en términos de la identidad trigonométrica:

$$\boxed{\sec^2 u = \operatorname{tg}^2 u + 1} \quad \text{ó} \quad \boxed{\csc^2 = \operatorname{ctg}^2 u + 1}$$

de esta forma las integrales que resultan serán potencias de la $\operatorname{tg} u$ ó $\operatorname{ctg} u$.

Es decir:

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^n u\, du \\ &= \int \sec^2 u \cdot \sec^{n-2} u\, du \\ &= \int \sec^2 u \cdot (\sec^2 u)^{\frac{n-2}{2}}\, du \\ &= \int \sec^2 u \cdot (\operatorname{tg}^2 + 1)^{\frac{n-2}{2}}\, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \csc^n u\, du \\ &= \int \csc^2 u \cdot \csc^{n-2} u\, du \\ &= \int \csc^2 u \cdot (\csc^2 u)^{\frac{n-2}{2}}\, du \\ &= \int \csc^2 u \cdot (c\operatorname{tg}^2 + 1)^{\frac{n-2}{2}}\, du \end{aligned}$$

Ejemplos:

(96) **Calcular:** $\int \sec^4 \frac{1}{2} x\, dx$

Solución:

$$I=\int \sec^4 \tfrac{1}{2}x\,dx=\int \sec^2\cdot\tfrac{1}{2}x\cdot\sec^2\tfrac{1}{2}x\,dx$$

$$=\int \sec^2\tfrac{1}{2}x\cdot\left(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x+1\right)du$$

$$=\int \sec^2\tfrac{1}{2}x\cdot\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x\,dx+\int\sec^2\tfrac{1}{2}x\,dx$$

$$=2\cdot\frac{\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}x}{3}+2\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x+K$$

$$=\tfrac{2}{3}\cdot\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}x+2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x+K$$

(97) **Calcular:** $I=\int \sec^6 5\,\theta\,d\theta$

Solución:

$$I=\int \sec^2 5\theta\cdot\sec^4 5\theta\,d\theta$$

$$=\int \sec^2 5\theta\cdot(\sec^2 5\theta)^2\,d\theta$$

$$=\int \sec^2 5\theta\,(\operatorname{tg}^2 5\theta+1)^2\,d\theta$$

$$=\int \sec^2 5\theta\,(\operatorname{tg}^4 5\theta+2\operatorname{tg}^2 5\theta+1)\,d\theta$$

$$=\int \sec^2 5\theta\cdot\operatorname{tg}^4 5\theta\,d\theta$$

$$+2\int \sec^2 5\theta\operatorname{tg}^2 5\theta\,d\theta+\int\sec^2 5\theta\,d\theta$$

$$=\tfrac{1}{5}\cdot\frac{\operatorname{tg}^5 5\theta}{5}+2\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3 5\theta}{3}+\tfrac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}5\theta+K$$

$$=\tfrac{1}{25}\cdot\operatorname{tg}^5 5\theta+\tfrac{2}{15}\cdot\operatorname{tg}^3 5\theta+\tfrac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}5\theta+K$$

(98) **Calcular:** $I=\int \csc^4\theta\,d\theta$

Solución:

$$I=\int \csc^2\theta\cdot\csc^2\theta\,d\theta$$

$$=\int \csc^2\theta\,(\operatorname{ctg}^2\theta+1)d\theta$$

$$=\int \csc^2\theta\cdot\operatorname{ctg}^2 d\theta+\int\csc^2\theta\,d\theta$$

$$=-\tfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\theta-\operatorname{ctg}\theta+K$$

(99) **Calcular:** $I=\int \csc^8 3\theta\,d\theta$

Solución:

$$I=\int \csc^2 3\theta\cdot\csc^6 3\theta\,d\theta$$

$$=\csc^2 3\theta(\csc^2 3\theta)^3\,d\theta$$

$$=\int \csc^2 3\theta(\operatorname{ctg}^2 3\theta+1)^3\,d\theta$$

$$=\int \csc^2 3\theta(\operatorname{ctg}^6 3\theta+3\operatorname{ctg}^4 3\theta$$

$$+3\operatorname{ctg}^2 3\theta+1)d\theta$$

$$=\int \csc^2 3\theta\cdot\operatorname{ctg}^6 3\theta\,d\theta$$

$$+3\int \csc^2 3\theta\cdot\operatorname{ctg}^4 3\theta$$

$$+3\int \csc^2 3\theta\cdot\operatorname{ctg}^2 3\theta\,d\theta+\int\csc^2 3\theta\,d\theta$$

$$=-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^7 3\theta}{7}+3\left(-\tfrac{1}{3}\right)\frac{\operatorname{ctg}^5 3\theta}{5}$$

$$+3\left(-\tfrac{1}{3}\right)\frac{\operatorname{ctg}^3 3\theta}{3}-\tfrac{1}{3}\operatorname{ctg}3\theta$$

$$I=-\tfrac{1}{21}\cdot\operatorname{ctg}^7 3\theta-\tfrac{1}{5}\cdot\operatorname{ctg}^5 3\theta-\tfrac{1}{3}\cdot\operatorname{ctg}^3 3\theta$$

$$-\tfrac{1}{3}\operatorname{ctg}3\theta+K$$

(100) Calcular: $I=\int \csc^6 \frac{x}{2}\cdot dx$

Solución:

$$I=\int \csc^6 \tfrac{x}{2}\cdot dx$$

$$=\int \csc^2 \tfrac{x}{2}\cdot \csc^4 \tfrac{x}{2}\cdot dx$$

$$=\int \csc^2 \tfrac{x}{2}\cdot \left(\csc^2 \tfrac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$=\int \csc^2 \tfrac{x}{2}\cdot \left(\operatorname{ctg}^2 \tfrac{x}{2}+1\right)^2 dx$$

$$=\int \csc^2 \tfrac{x}{2}\cdot \left(\operatorname{ctg}^4 \tfrac{x}{2}+2\operatorname{ctg}^2 \tfrac{x}{2}+1\right)dx$$

$$=\int \csc^2 \tfrac{x}{2}\cdot \operatorname{ctg}^4 \tfrac{x}{2}\cdot dx$$

$$+2\int \csc^2 \tfrac{x}{2}\cdot \operatorname{ctg}^2 \tfrac{x}{2} dx+\int \csc^2 \tfrac{x}{2}\cdot dx$$

$$=-2\cdot \frac{\operatorname{ctg}^5 \frac{x}{2}}{5}+2(-2)\frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}}{3}+(-2)\operatorname{ctg}\tfrac{x}{2}+K$$

$$=-\tfrac{2}{5}\cdot \operatorname{ctg}^5 \tfrac{x}{2}-\tfrac{4}{3}\cdot \operatorname{ctg}^3 \tfrac{x}{2}-2\operatorname{ctg}\tfrac{x}{2}+K$$

5.5 INTEGRALES DE LA FORMA: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ó $\int \operatorname{ctg}^m u\cdot \csc^n u\, du$

CASOS:

CASO I

Cuando $n=2k$ es número entero positivo par, se procede como las Integrales de la forma 5.4 . Así:

$$\operatorname{tg}^m \mu \sec^{2k} \mu\, d\mu = \operatorname{tg}^m \mu \underbrace{\boxed{\sec^2 \mu}}_{\text{FIJO}} \sec^{2k-2} \mu\, d\mu$$

$$=\underbrace{\boxed{\sec^2 \mu}}_{\text{FIJO}} \underbrace{\operatorname{tg}^m \mu [\operatorname{tg}^2 \mu+1]^{k-1}}_{\text{multiplicar}} d\mu$$

Todas las integrales resultan potencias de $\operatorname{tg}\mu$.

CASO II

Cuando "m" es impar $\wedge$ n es impar ó par se procede en descomponer en factores, tal que, aparezcan necesariamente juntos los factores $\sec\mu\cdot\operatorname{tg}\mu$ (ó $\csc\mu\cdot\operatorname{ctg}\mu$) para poder, finalmente integrar como potencias de $\sec\mu$ (ó $\csc\mu$), según sea la forma.

a) $\operatorname{tg}^{2k-1}\mu \sec^{2\ell-1}\mu = \underbrace{\boxed{\operatorname{tg}\mu\cdot\sec\mu}}_{\text{FIJO}} \underbrace{\operatorname{tg}^{2k}\mu}_{(\sec^2\mu-1)} \sec^{2\ell}\mu\, d\mu$ = **integrales de potencias de** $\sec\mu$

b) $\operatorname{tg}^{2k-1}\mu \sec^{2\ell}\mu = \boxed{\operatorname{tg}\mu\cdot\sec\mu} \underbrace{\operatorname{tg}^{2k}\mu}_{(\sec^2\mu-1)^k} \sec^{2\ell-1}\mu\, d\mu$ = **integrales de potencias de** $\sec\mu$

***Ejemplos*:**

(101) Calcular:

$$I = \int \mathrm{tg}^3\,\theta\,\sec^4\,\theta\,d\theta$$

***Solución*:**

$$I = \int \mathrm{tg}^3\theta \cdot (\sec^2\theta)\sec^2\,\theta\,d\theta$$

$$= \int \mathrm{tg}^3\theta \cdot (\mathrm{tg}^2\,\theta + 1)\sec^2\,\theta\,d\theta$$

$$= \int \mathrm{tg}^5\,\theta \cdot \sec^2\theta\,d\theta + \int \mathrm{tg}^3\,\theta \cdot \sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^6\,\theta}{6} + \frac{\mathrm{tg}^4\,\theta}{4} + k$$

(102) Calcular:

$$I = \int \mathrm{tg}^3\,\theta \cdot \sec^5\,\theta\,d\theta$$

***Solución*:**

$$I = \int \mathrm{tg}\,\theta \cdot \sec\theta \cdot \mathrm{tg}^2\,\theta\sec^4\theta\,d\theta$$

$$= \int \mathrm{tg}\,\theta \cdot \sec\theta \cdot (\sec^2\theta - 1)\sec^4\theta\,d\theta$$

$$= \int \mathrm{tg}\,\theta \cdot \sec\theta \cdot \sec^6\theta\,d\theta - \int \mathrm{tg}\,\theta \cdot \sec\theta \cdot \sec^4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\sec^7\theta}{7} - \frac{\sec^5\theta}{5} + K$$

(103) Calcular: $I = \int \mathrm{tg}^5\,2x\,\sec^3\,2x\,dx$

***Solución*:**

$$I = \int \mathrm{tg}\,2x \cdot \sec 2x \cdot \mathrm{tg}^4\,2x \cdot \sec^2 2x \cdot dx$$

$$= \int \mathrm{tg}\,2x \cdot \sec 2x \cdot (\mathrm{tg}^2\,2x)^2 \sec^2 2x\,dx$$

$$= \int \mathrm{tg}\,2x \cdot \sec 2x \cdot (\sec^2 2x - 1)^2 \sec^2 2x\,dx$$

$$= \int \mathrm{tg}\,2x \cdot \sec 2x \cdot (\sec^4 2x - 2\sec^2 2x + 1)\sec^2 2x \cdot dx$$

$$= \int \mathrm{tg}\,2x \cdot \sec 2x \cdot \sec^6\,2x\,dx - 2\int \mathrm{tg}\,2x \cdot \sec\,2x \cdot \sec^4\,2x\,dx + \int \mathrm{tg}2x \cdot \sec 2x \cdot \sec^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sec^7 2x}{7} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sec^5 2x}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sec^3 2x}{3} + K$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \sec^7 2x - \frac{1}{5} \cdot \sec^5 2x + \frac{1}{6} \cdot \sec^3 2x + K$$

(104) Calcular: $I=\int \text{ctg}^3\theta\cdot\csc^4\theta\,d\theta$

Solución:

$$I=\int \text{ctg}^3\theta\cdot\csc^4\theta\,d\theta$$

$$=\int \text{ctg}^3\theta\cdot\underbrace{\boxed{\csc^2\theta}}_{\text{FIJO}}\cdot\csc^2\theta\,d\theta$$

$$=\int \text{ctg}^3\theta\cdot\csc^2\theta\cdot(\text{ctg}^2\theta+1)\,d\theta$$

$$=\int \text{ctg}^5\theta\cdot\boxed{\csc^2\theta}\,d\theta+\int \text{ctg}^3\theta\cdot\boxed{\csc^2}\,\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{\text{ctg}^6\theta}{6}-\frac{\text{ctg}^4\theta}{4}+K$$

$$=-\tfrac{1}{6}\cdot\text{ctg}^6\theta-\tfrac{1}{4}\cdot\text{ctg}^4\theta+K$$

(105) Calcular: $I=\int \text{ctg}^5 6x\cdot\csc^7 6x\,dx$

Solución:

$$I=\int \underbrace{\boxed{\text{ctg}\,6x\cdot\csc 6x}}_{\text{FIJO}}\cdot\text{ctg}^4 6x\cdot\csc^6 6x\cdot dx$$

$$=\int(\text{ctg}\,6x\cdot\csc 6x)(\text{ctg}^2 6x)^2\cdot\csc^6 6x\,dx$$

$$=\int(\text{ctg}\,6x\cdot\csc 6x)(\csc^2 6x-1)^2\csc^6 6x\,dx$$

$$=\int(\text{ctg}\,6x\cdot\csc 6x)(\csc^4 6x-2\csc^2 6x+1)\csc^6 6x\,dx$$

$$=\int \text{ctg}\,6x\cdot\csc 6x\csc^{10}6x\,dx-2\int \text{ctg}\,6x\cdot\csc 6x\csc^8 6x\,dx+\int \text{ctg}\,6x\cdot\csc 6x\cdot\csc^6 6x\cdot dx$$

$$=-\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\csc^{11}6x}{11}-2\left(-\tfrac{1}{6}\right)\cdot\frac{\csc^9 6x}{9}+\left(-\tfrac{1}{6}\right)\frac{\csc^7 6x}{7}+K$$

$$=-\tfrac{1}{66}\cdot\csc^{11}6x+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\csc^9 6x}{9}-\tfrac{1}{42}\circ\csc^7 6x+K$$

$$=-\tfrac{1}{66}\cdot\csc^{11}6x+\tfrac{1}{27}\cdot\csc^9 6x-\tfrac{1}{42}\cdot\csc^7 6x+K$$

(106) **Calcular:** $I = \int \text{ctg}^3 5\theta \cdot \csc^4 5\theta \, d\theta$

Solución:

$$I = \int \overset{\text{FIJO}}{\boxed{\text{ctg} 5\theta \cdot \csc 5\theta}} \cdot \text{ctg}^2 5\theta \cdot \csc^3 5\theta \, d\theta$$

$$= \int (\text{ctg}\, 5\theta \cdot \csc 5\theta) \cdot (\csc^2 5\theta - 1) \csc^3 5\theta \, d\theta$$

$$= \int (\text{ctg}\, 5\theta \cdot \csc 5\theta) \cdot \csc^5 5\theta \, d\theta - \int (\text{ctg} 5\theta \cdot \csc 5\theta) \cdot \csc^3 5\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{\csc^6 5\theta}{6} - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\csc^4 5\theta}{4} + K$$

$$= -\frac{1}{30} \cdot \csc^6 5\theta + \frac{1}{20} \cdot \csc^4 5\theta + K$$

Otra forma de resolver

También se puede integrar como el caso I :

Así:

$$I = \int \text{ctg}^3 5\theta \cdot \csc^4 5\theta \, d\theta$$

$$= \int \text{ctg}^3 5\theta \cdot \csc^2 5\theta \cdot \csc^2 5\theta \, d\theta$$

$$= \int \text{ctg}^3 5\theta \cdot (\cot g^2 5\theta + 1) \csc^2 5\theta \, d\theta$$

$$= \int \text{ctg}^5 5\theta (\csc^2 5\theta) \, d\theta + \int \text{ctg}^3 5\theta (\csc^2 5\theta) d\theta$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{\text{ctg}^6 5\theta}{6} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\text{ctg}^4 5\theta}{4} + K$$

$$= -\frac{1}{30} \cdot \text{ctg}^6 5\theta - \frac{1}{20} \cdot \text{ctg}^4 5\theta + K$$

Nota: Este resultado es equivalente a la primera haciendo las transformaciones trigonométricas.

107 **Calcular:** $I = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^3 x \cdot dx$

Nota: *Esta Integral no se podrá calcular si hacemos* $\int \boxed{\operatorname{tg} x \cdot \sec x} \cdot \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx$

Pero si hacemos: $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ *se tendrá.* $I = \int (\sec^2 x - 1) \cdot \sec^3 x\, dx$

$$= \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx$$

Cada una de estas integrales se hace por partes.

6. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA DE FUNCIONES QUE CONTIENEN: $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 - a^2}$, $\sqrt{u^2 + a^2}$

Para estos casos, el método más corto para Integrar tales funciones es efectuar un cambio de variable del siguiente modo:

Función	Triángulo a construir	Hacer	Sustitución
$\sqrt{a^2 - u^2}$	a, u, θ, $\sqrt{a^2 - u^2}$	$\frac{u}{a} = \operatorname{sen}\theta$	$u = a \operatorname{sen} \theta$ $du = a \cos \theta\, d\theta$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	u, $\sqrt{u^2 - a^2}$, θ, a	$\frac{u}{a} = \sec\theta$	$u = a \sec \theta$ $du = a \sec \theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$
$\sqrt{u^2 + a^2}$	$\sqrt{u^2 - a^2}$, u, θ, a	$\frac{u}{a} = \operatorname{tg}\theta$	$u = a \operatorname{tg} \theta$ $du = a \sec^2 \theta\, d\theta$

108 Hallar: $I = \int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

Solución:

Hacer (triángulo: hipotenusa 2, cateto opuesto x, cateto adyacente $\sqrt{4-x^2}$, ángulo θ)

$$\frac{x}{2} = \text{sen}\,\theta \longrightarrow x = 2\text{sen}\,\theta$$
$$\longrightarrow dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

Sustituyendo: $$I = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(4-4\,\text{sen}^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{4^{3/2}(1-\text{sen}^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{2^3(\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\,\text{tg}\,\theta + K$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + K$$

109 Calcular: $I = \int \frac{dx}{(x^2+2)^{3/2}}$

Solución:

Hacer (triángulo: hipotenusa $\sqrt{x^2+2}$, cateto opuesto x, cateto adyacente $\sqrt{2}$, ángulo θ)

$$\frac{y}{\sqrt{7}} = \sec\theta \longrightarrow y = \sqrt{7}\sec\theta$$
$$\longrightarrow dy = \sqrt{7}\sec\theta\cdot\text{tg}\,\theta\, d\theta$$

Sustituyendo: $$I = \int\frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{(2\,\text{tg}^2\theta+2)^{3/2}} = \sqrt{2}\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{2^{3/2}(\text{tg}^2\theta+1)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^3} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\int\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\text{sen}\,\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C$$

(110) **Calcular:** $I = \int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-7}}$

Solución:

Hacer

$\frac{x}{\sqrt{2}} = \text{tg}\theta \longrightarrow x = \sqrt{2}\,\text{tg}\theta$

$\longrightarrow dx = \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$

Sustituir en I: $I = \int \frac{\sqrt{7}\sec\theta\,\text{tg}\theta\, d\theta}{7\sec^2\theta\sqrt{7\sec^2\theta-7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\int \frac{\text{tg}\,\theta\, d\theta}{(\sec\theta)\sqrt{7}\sqrt{\sec^2-1}}$

$$I = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}\cdot\int\frac{\text{tg}\theta}{\sec\theta\,\text{tg}\theta}\,d\theta = \frac{1}{7}\cdot\int\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\text{sen}\,\theta + C = \frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{y^2-7}}{y} + C$$

(111) **Calcular:** $I = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

Solución:

Hacer

$\frac{3}{x} = \text{tg}\theta \longrightarrow x = 3\text{tg}\theta$

$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$

$\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} = \sec\theta \longrightarrow \sqrt{x^2+9} = 3\sec\theta$

Sustituir en I:

$$I = \int\frac{3\sec\theta\cdot\text{tg}\theta\, d\theta}{27\sec^3\theta\,(3\,\text{tg}\,\theta)}$$

$$= \frac{1}{27}\cdot\int\frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{27}\cdot\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{27} \cdot \int \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{54} \cdot \int (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{54} \cdot \left[\theta + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\theta \right]$$

$$= \frac{1}{54} \cdot \left[\theta + \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta \right]$$

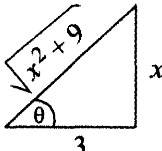
$$= \frac{1}{54} \cdot \left[\operatorname{arc\,sec} \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \cdot \frac{3}{x} \right]$$

$$= \frac{1}{54} \cdot \left[\operatorname{arc\,sec} \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{3\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} \right] + K$$

(112) **Calcular:** $I = \int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^6} dx$

***Solución*:**

Hacer



$\frac{x}{3} = \sec \longrightarrow x = 3 \sec \theta$

$\longrightarrow dx = 3 \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \, d\theta$

$\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{9} = \operatorname{tg} \theta \longrightarrow \sqrt{x^2 - 9} = 3 \operatorname{tg} \theta$

Sustituir:

$$I = \int \frac{3 \sec \theta}{3^6 \operatorname{tg}^6 \theta} (3 \sec^2 \theta \, d\theta) = \frac{3^2}{3^6} \cdot \int \frac{\sec^3 \theta}{\operatorname{tg}^6 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3^4} \cdot \int \frac{\frac{1}{\cos^3 \theta}}{\frac{\operatorname{sen}^6 \theta}{\cos^6 \theta}} d\theta = \frac{1}{81} \cdot \int \frac{\cos^6 \theta \, d\theta}{\cos^3 \theta \cdot \operatorname{sen}^6 \theta} = \frac{1}{81} \cdot \int \frac{\cos^3 \theta \, d\theta}{\operatorname{sen}^6 \theta}$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \int \left(\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right)^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^3 \theta} d\theta = \frac{1}{81} \cdot \int \operatorname{cotg}^3 \theta \cdot \csc^3 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \int (\operatorname{cotg} \theta \cdot \csc \theta) \cdot \operatorname{cotg}^2 \theta \cdot \csc^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \int \operatorname{cotg} \theta \cdot \csc \theta \cdot (\csc^2 \theta - 1) \csc^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \int (\text{ctg}\theta \cdot \csc\theta) \cdot \csc^4\theta \, d\theta - \frac{1}{81} \int (\text{ctg}\theta \cdot \csc\theta) \csc^2\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{81} \cdot \frac{\csc^5\theta}{5} - \frac{1}{81} \cdot (-1) \frac{\csc^3\theta}{3} + K$$

$$= -\frac{1}{405} \cdot \csc^5\theta + \frac{1}{243} \cdot \csc^3\theta + K$$

$$= -\frac{1}{405} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \right)^5 + \frac{1}{243} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \right)^3 + K$$

$$= -\frac{1}{405\,x^5} (x^2+9)^{5/2} + \frac{1}{243\,x^3} \cdot (x^2+9)^{3/2} + K$$

113 **Calcular:** $I = \int \frac{dx}{(1-2x)^4 \sqrt{4x^2-4x-4}}$

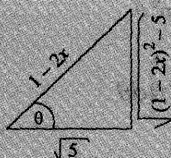
***Solución*:**

Lo primero que se hará es completar cuadrados en el radical, así:

$$4x^2 - 4x - 4 = \underbrace{4x^2 - 4x + 1} - 1 - 4$$
$$= (2x-1)^2 - 5$$
$$= (1-2x)^2 - 5$$

Luego: $I = \int \frac{dx}{(1-2x)^4 \sqrt{(1-2x)^2 - 5}}$

Hacer:



$$\frac{1-2x}{\sqrt{5}} = \sec\theta \longrightarrow 1 - 2x = \sqrt{5}\sec\theta$$

$$\longrightarrow -2dx = \sqrt{5}\sec\theta\, \text{tg}\theta\, d\theta$$

$$\longrightarrow dx = -\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta \cdot \text{tg}\theta\, d\theta$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$I = \int \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{\left(\sqrt{5}\sec\theta\right)^4\sqrt{\left(\sqrt{5}\sec\theta\right)^2-5}}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\int\frac{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{(25\sec^4\theta)(\sqrt{5}\,\mathrm{tg}\,\theta)} = -\frac{\sqrt{5}}{2\,(25)\sqrt{5}}\int\frac{d\theta}{\sec^3\theta}$$

$$= -\frac{1}{50}\cdot\int\cos^3\theta\,d\theta = \frac{-1}{50}\int\cos\theta\cdot\cos^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{50}\cdot\int\cos\theta\,(1-\mathrm{sen}^2\,\theta)\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{50}\cdot\left[\int\cos\theta\,d\theta - \int\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta\right]$$

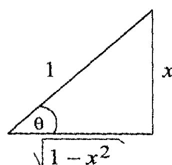
$$= -\frac{1}{50}\cdot\left[\mathrm{sen}\,\theta - \frac{\mathrm{sen}^3\theta}{3}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{50}\cdot\frac{\sqrt{(1-2x)^2-5}}{1-2x} + \frac{1}{150}\cdot\left(\frac{\sqrt{(1-2x)^2-5}}{1-2x}\right)^3 + C$$

(114) Calcular: $I = \int x^3\,(1-x^2)^{1/4}\,dx$

Solución:

Hacer:



$$\frac{x}{1} = \mathrm{sen}\,\theta \longrightarrow x = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\longrightarrow dx = \cos\theta\,d\theta$$

Sustituyendo:

$$I = \int \mathrm{sen}^3\theta\cdot(1-\mathrm{sen}^2\,\theta)^{1/4}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \mathrm{sen}^3\,\theta\cdot(\cos^2\theta)^{1/4}\,\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \mathrm{sen}^3\,\theta\cdot\cos^{1/2}\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int (\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cdot\cos^{3/2}\theta\cdot d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta \cdot (1-\cos^2\theta)\cdot \cos^{3/2}\theta\, d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta \cdot \cos^{3/2}\theta\, d\theta - \int \operatorname{sen}\theta \cdot \cos^{3/2}\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta \cdot \cos^{3/2}\theta\, d\theta \quad - \quad \int \operatorname{sen}\theta \cdot \cos^{7/2}\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\cos^{\frac{3}{2}+1}\theta}{\frac{3}{2}+1} \quad + \quad \frac{\cos^{\frac{7}{2}+1}\theta}{\frac{7}{2}+1} \quad + \quad C$$

$$= -\tfrac{2}{5}\cdot \cos^{5/2}\theta \quad + \quad \tfrac{2}{9}\cdot \cos^{9/2}\theta \quad + \quad C$$

$$= -\tfrac{2}{5}\cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{5/2} \quad + \quad \tfrac{2}{9}\cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{9/2} \quad + \quad C$$

$$= -\tfrac{2}{5}\cdot (1-x^2)^5 \quad + \quad \tfrac{2}{9}\cdot (1-x^2)^9 \quad + \quad C$$

(115) **Calcular:** $I = \int \frac{(1-x)\,dx}{\left(2+\sqrt{3+6x-9x^2}\right)^2}$

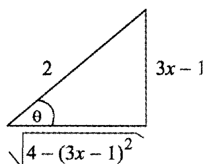
***Solución*:**

Paso 1 Completar cuadrados en el radical, así tendremos:

$$\begin{aligned} 3+6x-9x^2 &= 3-(9x^2-6x+\ldots) \\ &= 3-(9x^2-6x+1-1) \\ &= 3-(9x^2-6x+1)+1 \\ &= 4-(3x-1)^2 \end{aligned}$$

Luego: $I = \int \frac{(1-x)}{\left(2+\sqrt{4-(3x-1)^2}\right)^2}\cdot dx$

Paso 2 Hacer la siguiente sustitución:



$$\frac{3x-1}{2} = \operatorname{sen}\theta \longrightarrow 3x-1 = 2\operatorname{sen}\theta \longrightarrow x = \tfrac{1}{3}(1+2\operatorname{sen}\theta)$$

$$\longrightarrow 3dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\longrightarrow dx = \tfrac{2}{3}\cdot \cos\theta\, d\theta$$

Además: $\sqrt{4-(3x-1)^2} = 2\cos\theta$

Sustituyendo en I :

$$I = \int \frac{\left(1-\frac{1}{3}(1+2\,\text{sen}\theta)\right)\left(\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta\right)}{(2+2\cos\theta)^2}$$

$$I = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{(3-1-2\,\text{sen}\theta)\cos\theta\,d\theta}{3(4)(1+\cos\theta)^2} = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{(2-2\,\text{sen}\theta)\cos\theta}{12(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$I = \frac{2(2)}{3(12)}\cdot\int\frac{(1-\text{sen}\theta)\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$I = \frac{1}{9}\cdot\int\frac{(1-\text{sen}\theta)\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

Paso 3 Hacer la siguiente sustitución:

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\text{sen}\theta = 2\text{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2}-\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

Luego: $$I = \frac{1}{9}\int\frac{\left(1-2\text{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{36}\int\frac{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\text{sen}^2\frac{\theta}{2}-2\text{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos^3\frac{\theta}{2}+2\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta}{\cos^4\frac{\theta}{2}}$$

Separando en Suma de Integrales obtendremos:

$$= \frac{1}{36}\cdot\int\left[\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-\frac{\text{sen}^2\theta/2}{\cos^4\frac{\theta}{2}}-\frac{2\,\text{sen}\,\theta/2}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{2\,\text{sen}^3\theta/2}{\cos^3\frac{\theta}{2}}\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\int\left[\sec^2\frac{\theta}{2}-\text{tg}^2\frac{\theta}{2}\cdot\sec^2\frac{\theta}{2}-2\,\text{tg}\,\frac{\theta}{2}+2\,\text{tg}^3\,\frac{\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\left[2\,\text{tg}\,\frac{\theta}{2}-2\,\frac{\text{tg}^3\frac{\theta}{2}}{3}-2\,(2)\,\text{Ln}\left|\sec\frac{\theta}{2}\right|+2\int\text{tg}^3\,\frac{\theta}{2}\,d\theta\right]$$

Donde: $\int \text{tg}^3\frac{\theta}{2}\cdot d\theta = \int \text{tg}^2\frac{\theta}{2}\cdot \text{tg}\frac{\theta}{2}\cdot d\theta = \int\left(\sec^2\frac{\theta}{2}-1\right)\text{tg}\frac{\theta}{2}d\theta$

$$= \int \sec^2\frac{\theta}{2}\cdot \text{tg}\frac{\theta}{2}\cdot d\theta - \int \text{tg}\frac{\theta}{2}\cdot d\theta$$

$$= 2\cdot\frac{\text{tg}^2\frac{\theta}{2}}{2} - 2\,\text{Ln}\left|\sec\frac{\theta}{2}\right|$$

$$= \text{tg}^2\frac{\theta}{2} - 2\,\text{Ln}\left|\sec\frac{\theta}{2}\right|$$

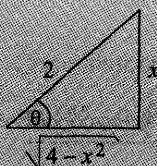
Luego: $I = \frac{1}{36}\left[2\,\text{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{2}{3}\cdot\text{tg}^3\frac{\theta}{2} - 4\,\text{Ln}\left|\sec\frac{\theta}{2}\right| + 2\,\text{tg}^2\frac{\theta}{2} - 4\text{Ln}\left|\sec\frac{\theta}{2}\right|\right]$

$$= \frac{1}{36}\left[2\,\text{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{2}{3}\cdot\text{tg}^3\frac{\theta}{2} - 8\,\text{Ln}\left|\sec\frac{\theta}{2}\right| + 2\,\text{tg}^2\frac{\theta}{2}\right] + C$$

(116) **Calcular:** $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

Hacer



$\frac{x-1}{3} = \sec\theta \longrightarrow x-1 = \sec\theta$

$\longrightarrow dx = 3\sec\theta\,\text{tg}\theta\,d\theta$

Sustituyendo en I: $I = \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{4-4\,\text{sen}^2\theta}} = \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{2\cos\theta}$

$$= \int d\theta = \theta = \text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

(117) **Calcular:** $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

Paso 1 Completar cuadrados en el denominador:

Así tendremos: $x^2-2x-8 = (x^2-2x+\ldots)-8$

$$= (x^2-2x+1-1)-8$$

$$= (x-1)^2-9$$

Entonces: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-9}}$

Paso 2 Hacer la sustitución:

$x-1$ $\quad \sqrt{(x-1)^2-9}$ $\quad \theta$ $\quad 3$

$\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\theta \longrightarrow x = 2\operatorname{sen}\theta$

$\longrightarrow dx = 2\cos\theta\, d\theta$

Luego:

$$I = \int \frac{3\sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta}{3\operatorname{tg}\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \operatorname{Ln}|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

$$= \operatorname{Ln}\left|\frac{x-1}{3} + \frac{\sqrt{(x-1)^2-9}}{3}\right| + C$$

$$= \operatorname{Ln}\left|\frac{x-1+\sqrt{(x-1)^2-9}}{3}\right| + C$$

$$= \operatorname{Ln}\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-9}\right| - \operatorname{Ln} 3 + C$$

$$= \operatorname{Ln}\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-9}\right| + \operatorname{Ln} k \;,\; c - \operatorname{Ln}3 = \operatorname{Ln} k$$

$$= \operatorname{Ln}(k|x-1+\sqrt{(x-1)^2-9}|)$$

7. INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Una función racional es aquella cuyo numerador y denominador son polinomios enteros, es decir son funciones en que la variable está afectada de exponentes enteros positivos.

Si el grado del numerado es mayor o igual al del denominador, deberá dividirse para obtener una expresión mixta.

Para integrar una expresión diferencial que contenga una función racional en el cual el denominador pueda descomponerse en factores primos reales, deberá tenerse en cuenta cuatro casos:

1er. CASO

Los factores del denominador son todos de 1er grado y ningún factor se repite.

Ejemplo:

Hallar: $I = \int \frac{2x-1}{x(x-2)(x+3)}\,dx$

Solución:

Paso 1

El número de factores que existan en el denominador indicará el número de fracciones que deberá separarse, así: En el presente ejemplo hay 3 factores en el denominador, lo cual indica que habrán 3 fracciones.

En consecuencia: $\underbrace{\frac{2x-1}{x(x-2)(x+3)}} = \frac{}{x} + \frac{}{x-2} + \frac{}{x+3}$

Tres factores, implica formar tres fracciones

Paso 2

En el numerador de cada fracción se escribe una constante, así:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Ahora los siguientes pasos son para hallar las constantes A, B y C.

Paso 3

Quitar los denominadores, simplificar y ordenar, así obtendremos que:

$$\boxed{2x-1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)} \quad (3^*)$$

$$= Ax^2 + Ax - 6A + Bx^2 + 3Bx + Cx^2 - 2Cx$$

$$2x-1 = (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A$$

Esta ecuación es una identidad, para todo $x \in \mathbb{R}$. En consecuencia habrá que igualar los coeficientes de las variables de igual potencia, así:

$$\begin{cases} A+B+C=0 & (1) \\ A+3B-2C=2 & (2) \\ -6A=-1 & (3) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:

De (3): $A = \frac{1}{6}$

Resolviendo (1) con (2), obtenemos:

$$\begin{cases} B + C = -\frac{1}{6} \\ 3B - 2C = 2 - \frac{1}{6} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B + C = -\frac{1}{6} \\ 3B - 2C = \frac{11}{6} \end{cases} \xrightarrow{\text{por } 2} \begin{cases} 2B + 2C = -\frac{2}{6} \\ 3B - 2C = \frac{11}{6} \end{cases}$$

$$5B = \frac{9}{6}$$

$$\longrightarrow \boxed{B = \frac{3}{10}}$$

Luego: $\boxed{C = -\frac{7}{15}}$

Paso 4

Sustituir los valores de A, B y C en el paso 2, así obtenemos:

$$\frac{1/6}{x} + \frac{3/10}{x-2} + \frac{-7/15}{x+3}$$

Paso 5

Finalmente, integramos cada fracción:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{7}{15}\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= \frac{1}{6}\cdot \text{Ln}|x| + \frac{3}{10}\cdot \text{Ln}|x-2| - \frac{7}{15}\cdot \text{Ln}|x+3| + \underbrace{C}_{\text{Ln}K}$$

$$= \text{Ln}\left(\frac{KX^{1/6}(x-2)^{3/10}}{(x+3)^{7/15}} \right)$$

7.1. MÉTODO PRÁCTICO PARA HALLAR *A*, *B* Y *C*

Un método práctico, rápido y breve para hallar las constantes A, B y C es sustituyendo, en la ecuación 3*, la variable "x" por los **"PUNTOS CRÍTICOS"**.

Veamos cómo es esto:

En primer lugar, los **"PUNTOS CRÍTICOS"** se hallan igualando a cero cada factor del denominador en la fracción inicial.

En el presente ejemplo, tenemos: $x(x-2)(x+3)=0$ → $x=0$, $x=2$, $x=-3$

En segundo lugar, cada punto crítico se sustituye en la identidad (3*)

Así tendremos en: $2x-1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$

Si $x=0 \rightarrow 2(0)-1 = A(0-2)(0+3) + B(0)(0+3) + C(0)(0-2)$

$$-1 = -6A + 0 + 0$$

$$A = \frac{1}{6}$$

Si $x=2 \rightarrow 2(2)-1 = 0 + B(2)(2+5) + 0$

$$3 = 10B$$

$$B = \frac{3}{10}$$

Si $x=-3 \rightarrow 2(-3)-1 = 0 + +0 + C(-3)(-3-2)$

$$-7 = 15C$$

$$C = -\frac{7}{15}$$

Nota: Los siguientes tres casos, se desarrollan similarmente.

2do. CASO

Los factores del denominador son todos de 1er grado y algunos se repiten.

Ejemplo:

Hallar: $I = \int \frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Solución:

Paso 1

Hay 3 **FACTORES** en el denominador, entonces habrán 3 fracciones. El factor $(x+1)$ se repite dos veces.

Entonces: $\underbrace{\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}} = \frac{}{x-1} + \frac{}{(x+1)^2} + \frac{}{x+1}$

3 factores implica formar 3 fracciones

El factor $(x+1)$ que se repite dos veces, se escribe descendiendo su grado (de grado dos hasta grado uno).

Paso 2

Como el factor que se repite es de primer grado entonces se escribe una constante en cada numerador.

Así tenemos: $\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$

Ahora, debemos hallar A, B y C.

Paso 3

Quitar los **DENOMINADORES** teniendo en cuenta que el mínimo común múltiplo es $(x-1)(x+1)^2$.

De esta manera obtenemos la siguiente identidad:

$$3x^2+5x = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1)$$

Continuación del problema

Por el método práctico, optamos por operar del siguiente modo.

En primer lugar, los puntos críticos se obtienen igualando a cero, el denominador de la fracción inicial.

En consecuencia si: $(x-1)(x+1)^2=0$ → $x=1$, $x=-1$

En segundo lugar, sustituir cada punto crítico en la siguiente identidad:

(*) $3x^2+5x=A(x+1)^2+B(x-1)+C(x+1)(x-1)$

Luego: si $x=1 \rightarrow 3+5=A(1+1)^2+0+0$

$$8=A(2)^2$$

$$8=4A$$

$$\boxed{A=2}$$

si $x=-1 \rightarrow 3-5=0+B(-1-1)+0$

$$-2=-2B$$

$$\boxed{B=1}$$

Ahora nos falta hallar el valor de C, pero como ya no existen más puntos críticos, entonces damos a "x" cualquier otro valor.

En consecuencia, volvamos a la ecuación (*).

Supongamos que: si $x=0 \rightarrow 0=A-B-C$

Pero: $A=2$ y $B=1 \rightarrow 0=2-1-C$

$$\rightarrow 0=1-C$$

$$\rightarrow \boxed{C=1}$$

Paso 4

Sustituir los valores de A, B y C en el paso 2, así obtendremos.

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

Paso 5

Integrar cada fracción:

$$= \int \frac{2}{x-1}\,dx \quad + \quad \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \quad + \quad \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 2\,\mathrm{Ln}\,|x-1| \quad + \quad \int (x-1)^{-2}\,dx \quad + \quad \mathrm{Ln}|x+1| + C \quad , \quad C = \mathrm{Ln}\,k$$

$$= 2\,\mathrm{Ln}|x-1| \quad + \quad \frac{(x+1)^{-1}}{-1} \quad + \quad \mathrm{Ln}|x+1| + \mathrm{Ln}\,k$$

$$I = \mathrm{Ln}\,k(x-1)^2(x+1) \quad - \quad \frac{1}{x+1}$$

3er. CASO

Cuando los factores en que puede descomponerse el denominador figuran algunos factores de segundo grado irreductible y ninguno se repite.

Ejemplo:

Hallar: $I = \int \frac{4x^3+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$

Solución:

Paso 1 El grado del numerador es igual al grado del denominador, entonces se divide.

Así:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+x+1 & x^3-1 \\ \cline{2-2} -4x^3 \qquad +4 & 4 \\ \cline{1-1} x+5 & \end{array}$$

Pues: $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$

Luego: $\frac{4x^3+x+1}{x^3-1} = 4 + \frac{x+5}{x^3-1} = 4 + \frac{x+5}{(x-1)(x^2+x+1)}$

Paso 2 Debemos separar en fracciones parciales la función:

$$\frac{x+5}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Como el denominador tiene dos factores, entonces se separan en dos fracciones parciales.

Así: $\dfrac{x+5}{\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}} = \dfrac{}{x-1} + \dfrac{}{x^2+x+1}$

2 factores implica formar 2 fracciones

Paso 3

El denominador de la primera fracción parcial es de primer grado, entonces en el numerador se escribirá una constante (polinomio, un grado menor que el denominador).

El denominador de la segunda fracción parcial es de segundo grado, entonces en el numerador se escribe un polinomio de primer grado de la forma $Bx+C$.

Así: $\dfrac{x+5}{\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

2 factores implica formar 2 fracciones

Paso 4

Quitar los denominadores: $x+5 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$

$$= Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

$$x+5 = (A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C$$

Por identidad de polinomios, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 & (1) \\ A-B+C=1 & (2) \\ A-C=5 & (3) \end{cases}$$

Sumar (1) + (2): $2A+C=1$

Resolver $\begin{cases} 2A+C=1 \\ A-C=5 \end{cases}$

$3A \quad = 6$

$\boxed{A=2}$ (4)

Sustituir (4) en (1):

$2+B=0 \rightarrow \boxed{B=-2}$

Sustituir (4) en (3):

$2-C=5 \rightarrow \boxed{C=-3}$

Paso 5

Sustituir los valores de A, B y C, se obtendrá:

$$\frac{4x^3+x+1}{x^3-1} = 4 + \frac{2}{x-1} + \frac{-2x-3}{x^2+x+1}$$

Paso 6

Integrar cada sumando: $I = 4x + 2\,\text{Ln}\,|x-1| - \underbrace{\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx}_{I_1}$

Cálculo de I_1:

$$I_1 = \int \frac{2x+3}{\underbrace{x^2+x+1}_{2x+1}}\,dx = \int \frac{2x+1+2}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \text{Ln}\,|x^2+x+1| + 2\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \text{Ln}\,|x^2+x+1| + 2\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\text{arctg}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)$$

$$= \text{Ln}\,(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

***Conclusión*:**

$$I = 4x + 2\,\text{Ln}|x-1| - \text{Ln}(x^2+x+1) - \frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

4to. CASO

Cuando el denominador contiene FACTORES DE 2do GRADO y algunos se repiten

***Ejemplo*:** Hallar: $I = \int \frac{x^3+1}{x\,(x^2+1)^2}\,dx$

Solución:

Paso 1

$$\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{}{x}+\frac{}{(x^2+1)^2}+\frac{}{x^2+1}$$

3 factores implica formar 3 fracciones

Paso 2

En el numerador de la primera fracción se escribe una constante.

En el numerador de la 2da y 3ra. fracción parcial se escribe un polinomio de primer grado de la forma $ax+b$.

Así tendremos: $=\frac{A}{x}+\frac{BX+C}{(x^2+1)^2}+\frac{DX+E}{x^2+1}$

Debemos hallar las constantes: A, B, C, D, E:

Paso 3

Quitar los denominadores:

$$\begin{aligned} x^3+1 &= A(x^2+1)^2(Bx+C)x+(Dx+E)x(x^2+1) \\ &= A(x^4+2x^2+1)+Bx^2+Cx+Dx^4+Dx^2+Ex^3+Ex \\ &= (A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A \end{aligned}$$

Por identidad de polinomios, tendremos:

$$\begin{cases} A+D=0 & (1) \\ E=1 & (2) \\ 2A+B+D=0 & (3) \\ C+E=0 & (4) \\ A=1 & (5) \end{cases}$$

Sustituir (5) en (1): $1+D=0 \longrightarrow D=-1$

Sustituir (2) en (4): $C+1=0 \longrightarrow C=-1$

Sustituir en (3) : $2(1)+B-1=0 \longrightarrow B=-1$

Paso 4

Los valores de A, B, C, D, E se reemplazan en el paso 2 $=\frac{1}{x}+\frac{-x-1}{(x^2+1)^2}+\frac{-x+1}{x^2+1}$

Paso 5 Integrar:

$$I = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx$$

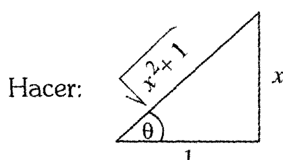
$$= \text{Ln}|x| - \int x\,(x^2+1)^{-2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \text{Ln}|x| - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1} - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - \tfrac{1}{2}\cdot\text{Ln}|x^2+1| + \text{arctg}\,x$$

$$= \text{Ln}|x| + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} - \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}_{I_1} - \tfrac{1}{2}\cdot\text{Ln}|x^2+1| + \text{arctg}\,x$$

Cálculo de I_1: $I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Hacer:



$$x = \text{tg}\theta \;\rightarrow\; dx = \sec^2\theta\,d\theta$$

Luego: $$I_1 = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\text{tg}^2\theta+1)^2} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int d\theta + \tfrac{1}{2}\int \cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\theta + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\theta + \tfrac{1}{4}\cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{arctg}\,x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{arctg}\,x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

Conclusión:

$$I = \text{Ln}|x| + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+1)} - \tfrac{1}{2}\cdot\text{arctg}\,x - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} - \tfrac{1}{2}\,\text{Ln}|x^2+1| + \text{arctg}\,x$$

$$= \text{Ln}\,\frac{1\times 1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1-x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\cdot\text{arctg}\,x + C$$

EJERCICIOS

(118) Hallar $I = \int \frac{4x-2}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx$

***Solución*:**

Factorizando el denominador: $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$

Entonces: $I = \int \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$

Pero: $\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$ .... (*)

$\longrightarrow \quad 4x - 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$

son puntos críticos: $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$.

Luego: si $x = 0 \Rightarrow -2 = A(-2)(1)$

$\boxed{A = 1}$

si $x = 2 \Rightarrow 6 = B(2)(3)$

$\boxed{B = 1}$

si $x = -1 \Rightarrow -6 = C(-1)(-3)$

$\boxed{C = -2}$

Sustituir en (*): $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{x+1}$

Integrando:

$$I = \text{Ln}|x| + \text{Ln}|x-2| - 2\text{Ln}|x+1| + C = \text{Ln}\left|\frac{x(x-2)K}{(x+1)^2}\right| \quad , \quad C = \text{Ln}\,K$$

(119) **Calcular:** $I = \int \frac{5x^2-3}{x^3-x}\,dx$

Solución:

1) Factorizar el denominador: $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

Luego: $I = \int \frac{5x^2-3}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

2) Separando en fracciones parciales:

$$\frac{5x^2-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

3) $\longrightarrow$ $5x^2 - 3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

Los puntos críticos son: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$

4) Ahora, sustituir cada punto crítico en (3)

si $x = 0 \Rightarrow -3 = A(-1)(1)$

$\boxed{A = 1}$

si $x = 2 \Rightarrow 6 = B(2)(3)$

$\boxed{B = 1}$

si $x = -1 \Rightarrow 2 = C(-1)(-2)$

$\boxed{C = 1}$

Sustituir (4) en (2): $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

5) Integrar $I = 3\text{Ln}|x| + \text{Ln}|x-1| + \text{Ln}|x+1| + \underbrace{C}_{\text{Ln}K}$

$I = \text{Ln}(x^3(x-1)(x+1)) + \text{Ln}\,K$

$I = \text{Ln}|(K\,x^3(x^2-1))|$

(120) **Calcular:** $I = \int \frac{4x^3 + 2x^2 + 1}{4x^3 - x}\, dx$

Solución:

1) Dividir numerador entre denominador:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 + 0 + 1 & 4x^3 - x \\ \hline -4x^3 + \qquad + x & 1 \\ \hline 2x^2 + x + 1 & \end{array}$$

Entonces: $I = \int \left(1 + \frac{2x^2 + x + 1}{4x^3 - x} \right) dx$

$$I = x + \underbrace{\int \frac{2x^2 + x + 1}{4x^3 - x}\, dx}_{I_1}$$

Cálculo de I_1

2) Factorizar el denominador: $4x^3 - x = x(4x^2 - 1) = (2x - 1)(2x + 1)$

Entonces: $I_1 = \int \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x-1)(2x+1)}\, dx$

3) Separando en fracciones parciales $\frac{2x^2 + x + 1}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{2x+1}$

Quitando denominadores:

4) $2x^2 + x + 1 = A(2x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(2x-1)$

Los puntos críticos son: $x(2x-1)(2x+1) = 0$ → $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$

5) Ahora, sustituir cada punto crítico en (4):

si $x = 0 \Rightarrow 1 = A(-1)(1)$

$$\boxed{A = -1}$$

si $x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 = B\left(\frac{1}{2}\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)$

$$\boxed{B = 2}$$

si $x = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = 0 + 0 + C\left(-\frac{1}{2}\right)\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)$

$$\boxed{1 = C}$$

6) Sustituir los valores de A, B, C en (3):

$$= \frac{-1}{x} + \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{2x+1}$$

7) Integrar: $I_1 = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{2}{2x-1}\,dx + \int \frac{1}{2x+1}\,dx$

$$I_1 = -\text{Ln}|x| + \text{Ln}|2x-1| + \tfrac{1}{2}\cdot\text{Ln}|2x+1| + \underbrace{K}_{\text{Ln}\,C}$$

$$I_1 = \text{Ln}[Cx^{-1}\,(2x-1)\,(2x+1)^{1/2}]$$

Conclusión: $I = x + \text{Ln}[Cx^{-1}\,(2x-1)\,(2x+1)^{1/2}]$

(121) Calcular: $I = \int \frac{(x^2-3)}{x^2\,(x-1)^3}\,dx$

Solución:

1) Separando en fracciones parciales:

$$\frac{x^2-3}{x^2\,(x-1)^3} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

5 factores implica formar 5 fracciones

Quitando denominadores:

2) $x^2 - 3 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-1) + Ex^2(x-1)^2$

Los puntos críticos se obtienen de $x^2(x-1)^3 = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Estos dos puntos críticos sólo nos permitirá hallar dos incógnitas al sustituir en (2); éstos son $A = 3$ y $C = -2$.

En este caso es preferible hallar las incógnitas por identidad de polinomios.

Veamos:

De (2) obtenemos:

$$x^2 - 3 = (B+E)x^4 + (A-3B+D-2E)x^3 + (-3A+3B+C-D+E)x^2 + (-3A-B)x - A$$

Por Identidad de polinomios obtenemos:

(1) $B+E=0 \longrightarrow 9+E=0 \longrightarrow \boxed{E=-9}$

(2) $A-3B+D-2E=0$

(3) $-3A+3B+C-D+E=1$

(4) $3A-B=0 \longrightarrow 9-B=0 \longrightarrow \boxed{B=9}$

(5) $-A=-3 \longrightarrow \boxed{A=3}$

Sustituir los valores de A, B y E:

en (2) : $3-27+D+18=0 \rightarrow \boxed{D=6}$

en (3) : $-9+27+C-6-9=1 \rightarrow \boxed{C=-2}$

3) Sustituir los valores de A, B, C, D, E en (1):

$$I = \int \left[\frac{3}{x^2} + \frac{9}{x} + \frac{-2}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{-9}{x-1} \right] dx$$

$$= 3\int x^{-2}\,dx + 9\text{Ln}|x| - 2\int (x-1)^{-3}dx + 6\int (x-1)^{-2}\,dx - 9\,\text{Ln}|x-1|$$

$$= 3\,\frac{x^{-1}}{-1} + 9\,\text{Ln}|x| - 2\cdot\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + 6\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - 9\,\text{Ln}|x-1|$$

$$= -\frac{3}{x} + 9\,\text{Ln}|x| + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{6}{x-1} - 9\text{Ln}|x-1| + C$$

(122) **Calcular:** $I = \int \frac{(4x^2+6)}{x^3+3x}\,dx$

***Solución*:**

1) Separar en fracciones parciales, Factorizando previamente el denominador, pues $x^3 + 3x = x(x^2 + 3)$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

2) Quitando denominadores: $4x^2 + 6 = A(x^2 + 3) + (Bx + C)x$

$$= Ax^2 + 3A + Bx^2 + Cx$$

$$= (A+B)x^2 + Cx + 3A$$

3) Por identidad de polinomios:

$$A + B = 4 \longrightarrow B = 4 - A$$

$$C = 0 \qquad \boxed{B = 2}$$

$$3A = 6 \longrightarrow \boxed{A = 2}$$

4) Sustituir en (1):

$$= \frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+3}$$

5) Integrando: $I = 2\text{Ln}|x| + \text{Ln}(x^2 + 3) + \underbrace{K}_{\text{Ln}K}$

$$I = \text{Ln}[Cx^2(x^2 + 3)]$$

(123) Calcular: $I = \int \frac{(x^2 + x - 10)\,dx}{(2x-3)(x^2+4)}$

***Solución*:**

1) Separando en fracciones parciales:

$$\frac{x^2 + x - 10}{(2x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

2) Quitando denominadores:

$$x^2+x-10=A(x^2+4)+(Bx+C)(2x-3)$$
$$=Ax^2+4A+2Bx^2-3Bx+2Cx-3C$$
$$=(A+2B)x^2+(-3B+2C)x+(4A-3C)$$

3) Por identidad de polinomios, obtenemos:

$A+2B=1$ .... (I)

$-3B+2C=1$ .... (II)

$4C-3C=-10$ .... (III)

En (II) multiplicar por 3 : $-9B+6C=3$

En (III) multiplicar por 2 : $8A-6C=-20$

$8A-9B=-17$ .... (IV)

(I) con (IV): $-8\begin{cases}A+2B=1\\8A-9B=-17\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}-8A-16B=-8\\8A-9B=-17\end{cases}$

$-25B=-25$

$\boxed{B=1}$

Luego: $A=-1$ y $C=2$

4) Sustituir en (1): $=\frac{-1}{2x-3}+\frac{x+2}{x^2+4}$

5) Integrar: $I=\int\frac{-1}{2x-3}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx$

$$I=-\tfrac{1}{2}\text{Ln}|2x-3|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx$$

$$I=-\tfrac{1}{2}\text{Ln}|2x-3|+\tfrac{1}{2}\cdot\text{Ln}\,|x^2+4|+2\cdot\tfrac{1}{2}\text{arctg}\,\tfrac{x}{2}$$

$$I=\tfrac{1}{2}\cdot\text{Ln}\left(\frac{x^2+4}{2x-3}\right)+\text{arctg}\,\tfrac{x}{2}+C$$

(124) Hallar: $I = \int \frac{(4x^2+2x+8)}{x(x^2+2)^2} dx$

Solución:

1) Separar en Fracciones Parciales: $\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$

3 factores implica formar 3 fracciones

2) Quitando denominadores:

$$4x^2+2x+8 = A(x^2+2)^2 + x(Bx+C) + x(x^2+2)(Dx+E)$$
$$= (A+D)^4 + Ex^3 + (4A+B+2D)x^2 + (C+2E)x + 4A$$

Por identidad de polinomios, obtenemos:

$$\begin{aligned} A+D&=0 \\ E&=0 \\ 4A+B+2D&=4 \\ C+2E&=2 \\ 4A&=8 \end{aligned} \qquad \text{De donde} \begin{cases} A=2 \\ E=0 \\ D=-2 \\ C=2 \\ B=0 \end{cases}$$

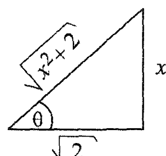
3) Sustituir en (1) los valores hallados: $= \frac{2}{x} + \frac{2}{(x^2+2)^2} + \frac{-2x}{x^2+2}$

4) Integrando: $I = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{2}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{-2x}{x^2+2} dx$

$$= 2\,\text{Ln}\,|x| + 2 \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+2)^2} dx}_{I_1} - \text{Ln}(x^2+2) + C$$

Cálculo de I_1: $I_1 = \int \frac{1}{(x^2+2)^2} dx$

Hacer



$\frac{x}{\sqrt{2}} = \text{tg}\,\theta \longrightarrow x = \sqrt{2}\,\text{tg}\,\theta$

$\longrightarrow dx = \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$

Sustituir en I_1 :

$$I = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta}{(2\,\text{tg}^2\theta + 2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2^2}\cdot \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot \int \frac{1}{\sec^2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{2}\cdot (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ \theta + \frac{1}{2}\cdot \text{sen}\, 2\theta\ \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ \theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta\ \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left[\ \text{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}}\ \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\,\text{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2} + C$$

Sustituir en (4):

$$I = 2\,\text{Ln}|x| + 2\left[\ \frac{\sqrt{2}}{8}\,\text{arc}\cdot\text{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2}\ \right] - \text{Ln}\,|x^2+2| + C$$

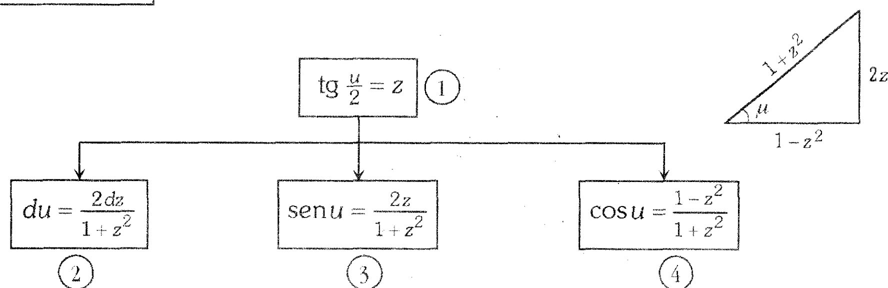
$$I = \text{Ln}\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\text{arc}\cdot\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2x^2+4}\right) + C$$

8. INTEGRAL DE FUNCIONES RACIONALES QUE CONTIENEN sen *u* y cos *u*

Teorema

$\int R(\operatorname{sen} u, \cos u)\, du$

Una diferencial trigonométrica que contiene sólo funciones racionales de sen *u* y cos *u* puede transformarse en otra expresión diferencial más sencilla mediante la sustitución:



Donde:

a) La fórmula 2 se deduce de 1 , del siguiente modo:

Si $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = z \longrightarrow \frac{u}{2} = \operatorname{arctg} z$

$\longrightarrow u = 2 \operatorname{arctg} z$

$\longrightarrow du = 2 \cdot \frac{dz}{1+z^2}$

b) La fórmula (4) se deduce de (1), del siguiente modo:

se sabe que $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} \longrightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{1+\cos u}$ (∗)

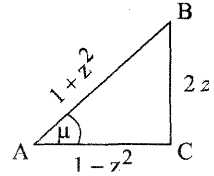
Pero $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = z$, entonces sustituyendo en (∗) se obtiene: $z^2 = \frac{1-\cos u}{1+\cos u}$

Ahora, despejar cos *u*: $z^2(1+\cos u) = 1-\cos u$

$\longrightarrow z^2 + z^2 \cos u + \cos u = 1$

$\longrightarrow \cos u(z^2+1) = 1-z^2 \rightarrow \boxed{\cos u \frac{1-z^2}{1+z^2}}$ (4)

c) La fórmula (4) implica la construcción del triángulo:



Mirando el triángulo se obtiene $\operatorname{sen} u = \frac{2z}{1+z^2}$

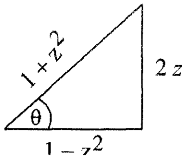
Pues el cateto $|CB| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2}$

$$|CB| = \sqrt{1+2z^2+z^4-1+2z^2-z^4} = \sqrt{4z^2} = 2z$$

(125) **Calcular:** $I = \int \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}$

Solución:

Sustituir



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \frac{2Z}{1+z^2} \\ \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2} \\ d\theta = \frac{2}{1+z^2}dz \end{cases}$$

Pues $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = z \longrightarrow \frac{\theta}{2} = \operatorname{arctg} z$

$\longrightarrow \theta = 2\operatorname{arctg} z$

$\longrightarrow d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$

Luego: $$I = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}dz}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2}{1+z^2+2z+1-z^2}dz = \int \frac{2}{2+2z}dz$$

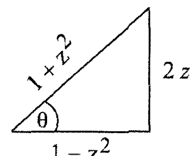
$$= \int \frac{dz}{1+z} = \operatorname{Ln}|1+z| + C$$

$$= \operatorname{Ln}|1+\operatorname{tg}\tfrac{\theta}{2}| + C$$

(126) **Calcular:** $\int \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$

Solución:

Usar la sustitución $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = z \longrightarrow d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$ y el triángulo



Entonces: $$I = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5+4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 2\int \frac{dz}{5(1+z^2)+4(1-z^2)} = 2\int \frac{dz}{z^2+9}$$

$$= 2\cdot\tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\tfrac{z}{3} + C = \tfrac{2}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{3}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{\theta}{2}\right) + C$$

(127) **Calcular:** $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}x + \operatorname{tg}x}$

***Solución*:**

Haciendo la sustitución $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ y usando el triángulo anterior obtenemos: $$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2dz}{1+z^2}+\frac{2z}{1-z^2}} = \int \frac{2(1+z^2)(1-z^2)}{[2z(1-z^2)+2z(1+z^2)](1+z^2)}$$

$$= \int \frac{(1-z^2)\,dz}{z(1-z^2)+z(1+z^2)} = \int \frac{1-z^2}{2z}dz$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{z^2-1}{z}dz = -\tfrac{1}{2}\cdot\int\left(z+\frac{-1}{z}\right)dz = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{z^2}{2} - \operatorname{Ln}|z|\right] + C$$

donde:

$$\begin{array}{r|l} z^2-1 & z \\ \hline -z^2 & z \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\cdot\operatorname{tg}^2\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\operatorname{Ln}\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right| + C$$

(128) **Calcular:** $I = \int \frac{dx}{4+5\cos x}$

***Solución*:**

Haciendo las sustituciones: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, $dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$; $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

$$I = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{4+5\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{2\,dz}{4+4z^2+5-5z^2} = \int \frac{2\,dz}{9-z^2} = 2\int \frac{dx}{9-z^2}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2(3)}\operatorname{Ln}\left|\frac{3+z}{3-z}\right| + C = \tfrac{1}{3}\cdot\operatorname{Ln}\left|\frac{3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$$

(129) Calcular: $I = \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{4\cos x + 3\operatorname{sen} x}$

Solución:

Haciendo las mismas sustituciones del ejercicio anterior, tenemos:

$$I = \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}\cdot\frac{2dz}{1+z^2}}{4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)+3\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)} = \int \frac{4z\,dz}{[4(1-z^2)+6z](1+z^2)} = \int \frac{4z\,dz}{[4-4z^2+6z](1+z^2)}$$

$$= \int \frac{2z\,dz}{[2-2z^2+3z](1+z^2)} = -2\int \frac{z\,dz}{(2z^2-3z-2)(1+z^2)} = -2\int \frac{z\,dz}{(2z+1)(z-2)(z^2+1)}$$

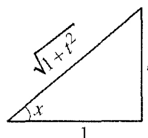
Por fracciones parciales obtenemos:

$$I = \frac{-4}{25}\operatorname{Ln}|2x+1| - \frac{4}{25}\operatorname{Ln}|z-2| + \frac{2}{25}(2\operatorname{Ln}(z^2+1) + 3\operatorname{arctg} z) + C$$

$$= -\frac{4}{25}\operatorname{Ln}\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| - \frac{4}{25}\operatorname{Ln}\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\right| + \frac{4}{25}\operatorname{Ln}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right) + \frac{3x}{25} + C$$

9. INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES DE *$\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, $\operatorname{tg}^2 x$*

Hacer la sustitución: $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arc\,tg} t$



$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ejemplo 1: Hallar: $I = \int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x - b^2\cos^2 x}$

Solución:

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{a^2\frac{t^2}{1+t^2} - b^2\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{a^2t^2-b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{1}{2\frac{b}{a}}\operatorname{Ln}\left|\frac{t-\frac{b}{a}}{t+\frac{b}{a}}\right|$$

$$= \frac{1}{2ab}\operatorname{Ln}\left|\frac{a\operatorname{tg} x - b}{a\operatorname{tg} x + b}\right| + C$$

Ejemplo 2: **Calcular:** $I=\int \frac{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}dx$

$$=\int \frac{\frac{1}{(1+t^2)^2}+\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^4}{(1-t^2)(1+t^2)^2}dt$$

Por fracciones parciales.

Nota: Haciendo transformaciones trigonométricas, resulta sencilla la integral.

$$\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x=1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=1-\tfrac{1}{2}4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x$$

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\cos 2x$$

Luego: $I=\int \frac{1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{\cos 2x}dx=\int \frac{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x}{\cos 2x}dx=\int \frac{1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x)}{\cos 2x}dx$

$$=\int \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x}{\cos 2x}dx=\int \frac{\frac{1}{2}}{\cos 2x}dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x\cdot dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \sec 2x\cdot dx+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|\operatorname{sen}2x+\operatorname{tg}2x|+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{Ln}|\sec 2x+\operatorname{tg}2x|+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\cdot\cos x+c$$

10. OTROS CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA INTEGRAL $\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx$

CASO 1 Si se cumple: $R(-\operatorname{sen}x,\cos x)=-R(\operatorname{sen}x,\cos x)$,
se hace la sustitución $\operatorname{sen}x=t$.

Cuando se cumple esta igualdad se dice que la función R es impar respecto a $\operatorname{sen}x$.

CASO 2 Si se cumple: $R(\operatorname{sen}x,-\cos x)=-R(\operatorname{sen}x,\cos x)$
se hace la sustitución $\operatorname{sen}x=t$.

R **es impar respecto a** $\cos x$.

CASO 3 Si se cumple: $R(-\operatorname{sen}x, -\cos x) = R(\operatorname{sen}x, \cos)$
se hace la sustitución $\operatorname{tg}x = t$.
↳ R **es par respecto a** $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$.

Nota: El caso 3 es el mismo de 3.5.1

Ejemplos:

(1) **Hallar:** $I = \int \frac{1}{a\cos x + b\operatorname{sen}x}\,dx$

Se tiene: $R(\operatorname{sen}x, \cos x) = \frac{1}{a\cdot\cos x + b\cdot\operatorname{sen}x}$

donde: $R(-\operatorname{sen}x, -\cos x) = \frac{1}{a(-\cos x) + b(-\operatorname{sen}x)} = -\frac{1}{a\cos x + b\,\mathrm{sex}}$

R no es par ni impar. Pero se puede aplicar la sustitución

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\operatorname{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{\frac{2\cdot dt}{1+t^2}}{a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\,\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2}{a - at^2 + 2bt}\,dt = \frac{2}{-a}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{2b}{a}t - 1}$$

↳ **Completar cuadrados**

$$= -\frac{2}{a}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{2b}{a}t + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} - 1} = -\frac{2}{a}\int \frac{1}{(t-\frac{b}{a})^2 - \frac{b^2+a^2}{a^2}}\,dt$$

$$= -\frac{2}{a}\,\frac{1}{2\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a}}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{t - \frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a}}{t - \frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{a}}\right|$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{at - b - \sqrt{b^2+a^2}}{at - b + \sqrt{b^2+a^2}}\right| + C \quad , \quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

(2) **Hallar:** $I = \int \frac{dx}{(2+\cos x)\operatorname{sen}x}$

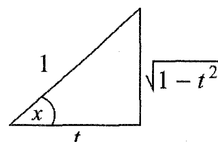
Se tiene: $R(\operatorname{sen}x, \cos x) = \frac{1}{(2+\cos x)\operatorname{sen}x}$

donde: $R(-\operatorname{sen}x, \cos x) = \frac{1}{(2+\cos x)(-\operatorname{sen}x)} = -\frac{1}{(2+\cos x)\operatorname{sen}x} = -R(\operatorname{sen}x, \cos x)$

Lo cual indica que R es impar respecto de a sen x.

Hacer la sustitución

$$\cos x = t$$
$$-\operatorname{sen} x\, dx = dt$$
$$dx = -\frac{dt}{\operatorname{sen} x}$$



Sustituir en I :

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{\operatorname{sen} x}}{(2+t)\operatorname{sen} x} = -\int \frac{dt}{(2+t)\operatorname{sen}^2 t} = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-\cos^2 t)} = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)(t-1)(t+1)} = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{6}\operatorname{Ln}\left|\frac{(t+1)^2(t-1)}{(t+1)^3}\right| + C$$

Por fracciones parciales se integra fácilmente

(3) **Calcular:** $I = \int \frac{(x+\operatorname{sen} x)}{1+\cos x}\, dx$. Hacer la sustitución:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$
$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$$
$$x = 2\operatorname{arctg} t$$
$$dx = \frac{2}{1+t^2}\cdot dt$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2\operatorname{arctg} t + \frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int \left(2\operatorname{arctg} t + \frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

$$= 2\int \operatorname{arctg} t\, dt + \operatorname{Ln}(1+t^2)$$

por partes: $u = \operatorname{arctg} t \qquad dv = dt$

$du = \frac{1}{1+t^2}dt \qquad v = t$

$$= 2\left[\, t\cdot\operatorname{arctg} t - \int \frac{t}{1+t^2}dt\,\right] + \operatorname{Ln}(1+t^2)$$

$$= 2t\cdot\operatorname{arctg} t$$

$$= 2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}$$

$$= x\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

4 **Calcular**: $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}\,dx$ ⟵ Reducir a seno y coseno

$$= \int \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}\,dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{1+\operatorname{sen} x\cdot\cos x}\,dx \quad \longleftarrow \text{Multiplicar y dividir por 2}$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\operatorname{sen} 2x}\,dx \quad \longleftarrow \text{Hacer: } 2x=\theta \Rightarrow x=\tfrac{1}{2}\theta,\quad dx=\tfrac{1}{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{2+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta \quad \longleftarrow \text{Dividir}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{2}{\operatorname{sen}\theta+2}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta+2}\,d\theta \quad \longleftarrow \text{Sustituir } \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t \\ \operatorname{sen}\theta=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ d\theta=\frac{2dt}{1+t^2}\end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \int \frac{dt}{t^2+t+1} \quad \longleftarrow \text{Completar cuadrados: } \underbrace{t^2+t+\tfrac{1}{4}}_{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}-\tfrac{1}{4}+1 = \left(t+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}$$

$$= x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) = x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

5 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{cotg} x} = \frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\operatorname{Ln}|\operatorname{tg} x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)}-\frac{3}{25}\operatorname{Ln}|\cos x|+C$

6 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x)+C$

(7) $I=\int\frac{dx}{(\operatorname{sen}x+2\sec x)^2}=\frac{\cos 2x-15}{15(4+\operatorname{sen}2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\operatorname{arcsen}\frac{4\operatorname{sen}2x+1}{4+\operatorname{sen}2x}+C$

(8) $I=\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{tg}x}dx=\frac{\cos x(\cos x-\operatorname{sen}x)}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{Ln}|\cos x-\operatorname{sen}x|+C$

(9) $I=\int\frac{dx}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1}{2}(x+\operatorname{Ln}|\operatorname{sen}x+\cos x|)+C$

(10) $I=\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x-\cos^3 x}dx=\operatorname{Ln}\frac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg}x-1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}+C$

Otras Integrales:

(11) $I=\int\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx$

Hacer $\sqrt{\operatorname{tg}x}=t$

Se obtiene: $I=\int\frac{2t^2}{1+t^4}dt$, $1+t^4=1+t^4+2t^2-2t^2=(1+t^2)^2-3t^2$

$I=\int\frac{2t^2\,dt}{(1+t^2)^2-2t^2}$ se integra por fracciones parciales

$I=\frac{1}{\sqrt{2}}[\operatorname{Ln}(\operatorname{sen}x+\cos x-\sqrt{\operatorname{sen}2x})+\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x-\cos x)]+C$

(12) $I=\int\sqrt{1+\operatorname{sen}x}\,dx=2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$, si $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geq 0$

(13) $I=\int\sqrt{1+\operatorname{cosec}x}\,dx=2\operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}x}+C$

(14) $I=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3\frac{x}{2}}}=\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\operatorname{Ln}\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C$

(4) **Calcular:** $I=\int\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x}\,dx$ ⟵ Reducir a seno y coseno

$$=\int\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{1+\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}}\,dx$$

$$=\int\frac{\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{1+\operatorname{sen}x\cdot\cos x}\,dx$$ ⟵ Multiplicar y dividir por 2

$$=\int\frac{\operatorname{sen}2x}{2+\operatorname{sen}2x}\,dx$$ ⟵ Hacer: $2x=\theta \Rightarrow x=\frac{1}{2}\theta$

$dx=\frac{1}{2}d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{sen}\theta}{2+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$ ⟵ Dividir

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2}{\operatorname{sen}\theta+2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\theta-\int\frac{1}{\operatorname{sen}\theta+2}\,d\theta$$ ⟵ Sustituir $\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t\\ \operatorname{sen}\theta=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad d\theta=\frac{2dt}{1+t^2}\end{cases}$

$$=\frac{1}{2}\theta-\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\theta-\int\frac{dt}{t^2+t+1}$$ ⟵ Completar cuadrados: $\underbrace{t^2+t+\frac{1}{4}}_{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{4}+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$$=\frac{1}{2}\theta-\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}$$

$$=x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)=x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

(5) $I=\int\frac{dx}{4+\operatorname{tg}x+4\operatorname{cot}gx}=\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\operatorname{Ln}|\operatorname{tg}x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg}x+2)}-\frac{3}{25}\operatorname{Ln}|\cos x|+C$

(6) $I=\int\frac{dx}{4-3\cos^2x+5\operatorname{sen}^2x}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+C$

(7) $I=\int \frac{dx}{(\operatorname{sen}x+2\sec x)^2}=\frac{\cos 2x-15}{15(4+\operatorname{sen}2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\operatorname{arcsen}\frac{4\operatorname{sen}2x+1}{4+\operatorname{sen}2x}+C$

(8) $I=\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{tg}x}dx=\frac{\cos x\,(\cos x-\operatorname{sen}x)}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{Ln}|\cos x-\operatorname{sen}x|+C$

(9) $I=\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1}{2}(x+\operatorname{Ln}|\operatorname{sen}x+\cos x|)+C$

(10) $I=\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x-\cos^3 x}\,dx=\operatorname{Ln}\frac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg}x-1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}+C$

Otras Integrales:

(11) $I=\int \sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx$

Hacer $\sqrt{\operatorname{tg}x}=t$

Se obtiene: $I=\int \frac{2t^2}{1+t^4}dt$, $1+t^4=1+t^4+2t^2-2t^2=(1+t^2)^2-3t^2$

$I=\int \frac{2t^2\,dt}{(1+t^2)^2-2t^2}$ se integra por fracciones parciales

$I=\frac{1}{\sqrt{2}}[\operatorname{Ln}(\operatorname{sen}x+\cos x-\sqrt{\operatorname{sen}2x})+\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x-\cos x)]+C$

(12) $I=\int \sqrt{1+\operatorname{sen}x}\,dx=2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$, si $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geq 0$

(13) $I=\int \sqrt{1+\operatorname{cosec}x}\,dx=2\operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}x}+C$

(14) $I=\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3\frac{x}{2}}}=\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\operatorname{Ln}\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C$

EJERCICIOS DIVERSOS

Hallar las integrales:

1) $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$

2) $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$

3) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$

4) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$

8) $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$

9) $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

10) $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Respuestas:

1) $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x$

2) $\frac{1}{8}\frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\text{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

3) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$, $x>0$

4) $\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}$

5) $\frac{1}{2}\text{Ln}\,\frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$

donde $z=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$

6) $-\frac{1}{3}\text{Ln}\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right|$

7) $\frac{1}{2}\arccos\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$

8) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\text{Ln}\,\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}$

9) $-\frac{1}{24}(15+10x+8x^2)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}\text{arc sen}\sqrt{x}\,(0<x<1)$

10) $-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-\text{Ln}\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\;(|x|<1)$

INTEGRALES INDEFINIDAS

EJERCICIOS

GRUPO I: INTEGRALES INMEDIATAS

Calcular:

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} dx$
3. $\int \sqrt[3]{1-3x}\, dx$
4. $\int \frac{1}{(5x-2)^{5/2}} dx$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
6. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^2}\, dx$
7. $\int \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}} \cdot dx$
8. $\int x \cdot e^{-x^2} \cdot dx$
9. $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$
10. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
11. $\int \frac{2}{1-e^x} dx$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
13. $\int \frac{\text{Ln}^2 x}{x} \cdot dx$
14. $\int \frac{dx}{x\, \text{Ln}\, x\, \text{Ln}(\text{Ln}\, x)}$
15. $\int \frac{\text{sen}\, x}{\sqrt{\cos^2 x}} dx$
16. $\int \frac{\text{sen}\, x + \cos x}{\sqrt[3]{\text{sen}\, x - \cos x}} dx$
17. $\int \frac{\text{sen}\, x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2 \,\text{sen}\, x + b^2 \cos^2 x}}$
18. $\int \frac{\text{sen}\, x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$
19. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\text{sen}\, 2x}} dx$
20. $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \sqrt[4]{\text{ctg}\, x}}$
21. $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x}$
22. $\int \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2} dx$
23. $\int \frac{dx}{(\text{arcsen}\, x)^2 \sqrt{1-x^2}}$
24. $\int \sqrt{\frac{\text{Ln}\,(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\, dx$
25. $\int \frac{1}{1-x^2} \text{Ln} \frac{1+x}{1-x} dx$
26. $\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$
27. $\int \frac{\text{sen}\, x \cos x}{\text{sen}^4 x + \cos^4 x} dx$
28. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4x} dx$
29. $\int x^2 (2-3x^2)^2\, dx$
30. $\int x(1-x)^{10} \cdot dx$

31 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$

32 $\int \frac{x^5}{x+1}\,dx$

33 $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$

34 $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$

35 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$

36 $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}\,dx$

37 $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$

38 $\int (\cos\alpha - \cos 2x)\,dx$

39 $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$

40 $\int \frac{(\operatorname{Ln} x)^m}{x}\,dx$

41 $\int \frac{dx}{x \operatorname{Ln} x}$

42 $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

43 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

44 $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^4}}\,dx$

45 $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$

46 $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$

47 $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

48 $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$

49 $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$

50 $\int \frac{2x-\sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

51 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

52 $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

53 $\int \frac{x+(\operatorname{arc}\cos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

54 $\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}$

55 $\int \frac{dx}{x(4-Ln^2 x)}$

56 $\int \frac{\operatorname{arc}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

57 $\int \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,dx$

58 $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}+x\operatorname{Ln}(1+x^2)+1}{1+x^2}\,dx$

59 $\int \frac{\sec x\,\operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x+1}}\,dx$

60 $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}\,dx$

En los siguientes integrales, previamente se divide antes de integrar.

61 $\int \frac{x}{x+4}\,dx$

62 $\int \frac{3+x}{3-x}\,dx$

63 $\int \frac{(1+x)^3}{x^2+1}\,dx$

64 $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

65 $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

66 $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx$

Para hallar las siguientes integrales se requiere:

1° Sumar y restar constantes que hacen falta para hallar antiderivadas conocidas.

2° Completar cuadrados para encontrar fórmulas conocidas de integración inmediata.

67 $\int \frac{5x-3}{x^2+6x+12}\,dx$

68 $\int \frac{2x+10}{2x^2+5x+1}\,dx$

69 $\int \frac{x+5}{x^2+x-6}\,dx$

70 $\int \frac{6x+20}{6x^2+7x-3}\,dx$

71 $\int \frac{x+1}{2x^2+6x+9}\,dx$

72 $\int \frac{x-2}{3x^2+2x+3}\,dx$

73 $\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$

74 $\int \frac{6-2x}{\sqrt{8-4x-4x^2}}\,dx$

75 $\int \frac{3-x}{\sqrt{4x-x^2}}$

76 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx$

77 $\int \frac{(3x-1)}{4x^2-4x+17}\,dx$

78 $\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$

79 $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

80 $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$

81 $\int \frac{4-3x}{5x^2+6x+18}\,dx$

82 $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$

83 $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}$

84 $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx$

85 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

Integrales por Partes:

86 $\int x\cdot \text{sen}\,2x dx$

87 $\int x\cos x\,dx$

88 $\int x\cdot\cos^2 x dx$

89 $\int x\cdot \text{tg}^2 dx$

90 $\int x^3\cdot \text{sen}\,x dx$

91 $\int x^n\,\text{Ln}x dx,\ n\neq -1$

92 $\int \sqrt{x}\cdot \text{Ln}^2 x\,dx$

93 $\int x\,\text{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

94 $\int x^2\text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

95 $\int (\text{Ln}x)^2\,dx$

96 $\int \text{Ln}\,(x^2+1)\,dx$

97 $\int \frac{\text{Ln}^3 x}{x^2}\,dx$

98 $\int x\,e^{-x}\,dx$

99 $\int x^2\,e^{-x}\,dx$

100 $\int x^3\,e^x\,dx$

101 $\int x^2\,a^x\,dx$

102 $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

103 $\int e^x \cdot \cos 3x\,dx$

104 $\int arc\cos x \cdot dx$

105 $\int x \cdot arc\,\text{tg}\,x\,dx$

106 $\int \frac{\text{arcsen}\,x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

107 $\int \frac{x\,\text{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

108 $\int \frac{\text{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

109 $\int (arc\operatorname{sen} x)^2\,dx$

110 $\int (\text{arctg}\,x)^2\,dx$

111 $\int \operatorname{sen}(\text{Ln}\,x)\,dx$

112 $\int \cos\,(\text{Ln}\,x)\,dx$

113 $\int \frac{x^2\,e^x}{(x+2)^2}\,dx$

114 $\int x^2\,e^x \operatorname{sen} x \cdot dx$

115 $\int \operatorname{sen} x \cdot \text{Ln}(\text{tg}\,x)\,dx$

116 $\int \text{Ln}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

117 $\int \frac{x\,\text{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

118 $\int \frac{x\,e^{\text{arctg}\,x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

119 $\int \frac{e^{\text{arctg}\,x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

120 $\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$

121 $\int e^{2x} \operatorname{sen}^2 x \cdot dx$

122 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

123 $\int \operatorname{sen} \sqrt[3]{3\,dx}$

124 $\int \frac{arc\operatorname{sen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

125 $\int \frac{\text{arctg}\,x}{x^2(1+x^2)}\,dx$

126 $\int \frac{x^2\,\text{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES DE FUNCIONES RACIONALES

127 $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

128 $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

129 $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\,dx$

130 $\int \frac{x}{2x^2-3x-2}\,dx$

131 $\int \frac{1+x^4}{x\,(x^2-1)}\,dx$

132 $\int \frac{x^2-3x+2}{x\,(x^2+2x+1)}\,dx$

133 $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\,dx$

134 $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$

135 $\int \frac{1}{x^4-x^2}\,dx$

136 $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$

137 $\int \frac{(x^2-2x+3)}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}\,dx$

138 $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

139 $\int \frac{1}{1+x^3}\,dx$

140 $\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$

141 $\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$

142 $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}\,dx$

143 $\int \frac{8x-4x^2+8}{x(x^2-4)}\,dx$

144 $\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}\,dx$

145 $\int \frac{x^3-1}{x+x^3}\,dx$

146 $\int \frac{x^2-4}{(x+1)^3}\,dx$

147 $\int \frac{x\cdot dx}{(x-2)(x^2-4x+5)^2}$

148 $\int \frac{x^3+1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

149 $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

150 $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$ ... **Sug. Sumar y restar $2x^2$ en el denominador y factorizar**

151 $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)}\,dx$

152 $\int \frac{dx}{x(x^2+4)(x^2+1)}$

153 $\int \frac{1}{(x^2+9)^3}\,dx$

154 $\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}\,dx$

155 $\int \frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$

156 $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

157 $\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx$

158 $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

159 $\int \sqrt{(x^2+4)^3}\,dx$

160 $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

161 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,dx$

162 $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}}\,dx$

163 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$

164 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

165 $\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{3/2}}$

166 $\int \frac{x}{(7+4x+x^2)^{3/2}}\,dx$

167 $\int \frac{1}{x\,(x^2-a^2)^{3/2}}\,dx$

168 $\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}\,dx$

169 $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx\,,\ a>0$

170 $\int \frac{1}{(x^2-16)^{3/2}}\,dx$

INTEGRALES DEL TIPO $I=\int R(\operatorname{sen}x\,,\cos x)\,dx$

171 $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx$

172 $\int \frac{1}{1+2\cos x}\,dx$

173 $\int \frac{\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}\,dx$

174 $\int \frac{1}{a\cos x+b\operatorname{sen}x+c}\,dx$

175 $\int \frac{1}{\cos x-\cos a}\,dx$

176 $\int \frac{1}{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}\,dx$

177 $\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$

178 $\int \frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos x}\,dx$

179 $\int \frac{1}{\operatorname{sen}x+\cos x+\sqrt{2}}\,dx$

180 $\int \frac{1}{3\cos x+\operatorname{sen}x+1}\,dx$

181 $\int \frac{1}{\cos x+2\operatorname{sen}x+3}\,dx$

182 $\int \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx$

183 $\int \frac{1-\cos x}{(1-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}x)^2}\,dx$

184 $\int \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx$

185 $\int \frac{1}{5-3\cos x}\,dx$

186 $\int \frac{1}{5+4\operatorname{sen}x}\,dx$

187 $\int \frac{2-\operatorname{sen}x}{2+\cos x}\,dx$

188 $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{tg}x}\,dx$

189 $\int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

190 $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x-\cos^3 x}\,dx$

RESPUESTAS

GRUPO 1:

1 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2\,\text{Ln}\,|x|$

2 $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$

3 $-\frac{1}{4}(1-3x)^{4/3}$

4 $-\frac{2}{15(5x-2)^{3/2}}$

5 $-\sqrt{1-x^2}$

6 $\frac{1}{4}(1+x^3)^{4/3}$

7 $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$

8 $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$

9 $\text{Ln}\,(2+e^x)$

10 $\text{arctg}\;e^x$

11 $-2\,\text{Ln}\,(e^{-x}-1)$

12 $-\text{Ln}\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$

13 $\frac{1}{3}\text{Ln}^3x$

14 $\text{Ln}\,|\text{Ln}\,(\text{Ln}x)|$

15 $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$

16 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\text{sen}\,2x}$

17 $\frac{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2x+b^2\cos^2x}}{a^2-b^2}\;,\;a^2\neq b^2$

18 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Ln}\,|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\,|$

19 $\frac{1}{2}\text{arc sen}\,(\sqrt{2}\,\text{sen}\,x)$

20 $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{c\,\text{tg}^3\,x}$

21 $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)$

22 $\frac{1}{2}(\text{arctg}\,x)^2$

23 $-\frac{1}{\text{arc sen}\,x}$

24 $\frac{2}{3}\text{Ln}^{3/2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

25 $\frac{1}{4}\text{Ln}^2\,\frac{1+x}{1-x}$

26 $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc sen}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\text{sen}\,x\right)$

27 $\frac{1}{2}\text{arctg}\,(\text{tg}^2\,x)$

28 $\frac{1}{2(\text{Ln}3-\text{Ln}2)}\,\text{Ln}\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$

29 $\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7$

30 $-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}$

31 $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$

32 $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\text{Ln}(x+1)$

33 $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{3/2}$

34 $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+c$

35 $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x+x)+c$

36 $\operatorname{arctg} x-\frac{2}{x}+c$

37 $3x-\frac{2(1\cdot 5)^x}{\operatorname{Ln} 1\cdot 5}+c$

38 $x\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+c$

39 $c-\cos(e^x)$

40 $\frac{\operatorname{Ln}^{m+1} x}{m+1}+c$, $m\neq 1$ y

$\operatorname{Ln}|\operatorname{Ln} x|+c$, si $m=-1$

41 $\operatorname{Ln}|\operatorname{Ln} x|+c$

42 $\frac{\operatorname{arc\,sen} 2^x}{\operatorname{Ln} 2}+c$

43 $\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+c$

44 $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x^2}{a}+c$

45 $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{e^x}{2}+c$

46 $e^x+e^{-x}+c$

47 $\operatorname{arc\,sen} x-\sqrt{1-x^2}+c$

48 $\frac{3}{2}\operatorname{Ln}(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$

49 $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2-\frac{1}{4}\operatorname{Ln}(x^4+1)+c$

50 $c-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arc\,sen} x)^3}$

51 $\operatorname{arc\,sen} x+\sqrt{1-x^2}+c$

52 $\operatorname{arc\,sen} x+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$

53 $c-\frac{1}{9}\left[\sqrt{1-9x^2}+(\operatorname{arc\,cos} 3x)^3\right]$

54 $\frac{2}{3}\left[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right]-x+c$

55 $\frac{1}{4}\operatorname{Ln}\left|\frac{2+\operatorname{Ln} x}{2-\operatorname{Ln} x}\right|$

56 $-\frac{(\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{2})^2}{2}$

57 $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2}}\right)$

58 $e^{\operatorname{arctg} x}+\frac{\operatorname{Ln}^2(1+x^2)}{4}+\operatorname{arctg} x$

59 $\operatorname{Ln}\left(\sec x+\sqrt{\sec^2 x+1}\right)$

60 $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{Ln}\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{5}-\operatorname{sen} 2x}\right|$

61 $x-4\operatorname{Ln}|x+4|+c$

62 $-x-6\operatorname{Ln}|x-3|+c$

63 $\frac{x^2}{2}+3x+\operatorname{Ln}(x^2+1)-3\operatorname{arctg} x$

64 $\frac{x^3}{3}-x-\operatorname{arctg} x$

65 $x-2\operatorname{arctg} x$

66 $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\operatorname{Ln}|2x-1|$

67 $\frac{5}{2}\operatorname{Ln}(x^2+6x+12)-\frac{18}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}$

68 $\frac{1}{2}\text{Ln}(2x^2+5x+1)+\frac{15\sqrt{17}}{34}\text{Ln}\left(\frac{4x+5-\sqrt{17}}{4x+5+\sqrt{17}}\right)$

69 $\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+x-6)+\frac{9}{10}\text{Ln}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)+c$

70 $\frac{3}{2}\text{Ln}(6x^2+7x-3)+\frac{3}{2}\text{Ln}\left(\frac{3x-1}{2x+3}\right)+c$

71 $\frac{1}{4}\text{Ln}(2x^2+6x+9)-\frac{1}{6}\text{arctg}\left(\frac{2x+3}{3}\right)+c$

72 $\frac{1}{6}\text{Ln}(3x^2+2x+3)-\frac{7\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\left(\frac{3x+1}{2\sqrt{2}}\right)+c$

73 $-\sqrt{3+2x-x^2}+3\,arc\,\text{sen}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$

74 $\frac{1}{2}\sqrt{8-4x-4x^2}+\frac{7}{2}\,arc\,\text{sen}\left(\frac{2x+1}{3}\right)+c$

75 $\sqrt{4x-x^2}+arc\,\text{sen}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$

76 $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2-4}-\frac{1}{3}\text{Ln}\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right|+c$

77 $\frac{3}{8}\left[\text{Ln}(4x^2-4x+17+\frac{1}{6}\text{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+c$

78 $\frac{61}{16}\text{Ln}\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+c$

79 $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\,Ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+c$

80 $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\text{Ln}\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+c$

81 $\frac{29}{45}\text{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\text{Ln}(5x^2+6x+18)+c$

82 $\frac{3}{2}\text{Ln}(x^2-4x+5)+4\,\text{arctg}(x-2)$

83 $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\,\text{arcsen}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$

84 $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\text{Ln}\left(x\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5x^2-2x+1}\right)$

85 $\sqrt{x^2+2x+2}+2\,\text{Ln}(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+c$

86 $\frac{1}{4}\text{sen}\,2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+c$

87 $x\,\text{sen}+\cos x+x$

88 $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\,\text{sen}\,x+\frac{1}{8}\cos 2x+c$

89 $x\cdot\text{tg}\,x-\frac{x^2}{2}+\text{Ln}\,|\cos x|+c$

90 $c-x^2\cos x+3x^2\text{sen}\,x+6x\cos x-6\,\text{sen}\,x$

91 $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\text{Ln}x-\frac{1}{n+1}\right)$

92 $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\text{Ln}^2x-\frac{4}{3}\text{Ln}\,x+\frac{8}{9}\right)$

93 $x-\frac{1-x^2}{2}\text{Ln}\,\frac{1+x}{1-x}$

94 $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\text{Ln}\,|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\text{Ln}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

95 $x(\text{Ln}\,x)^2-2x\,\text{Ln}\,x+2x+c$

96 $x\,\text{Ln}(x^2+1)-2x+2\,\text{arctg}\,x+c$

97 $c-\frac{1}{x}(\text{Ln}^3x+3\text{Ln}^3x+6\text{Ln}x+6)$

98 $c-e^{-x}(x+1)$

99 $c-e^{-x}(2+2x+x^2)$

100 $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+c$

101 $a^x\left(\frac{x^2}{\text{Ln}a}-\frac{2x}{\text{Ln}^2x}+\frac{2}{\text{Ln}^3a}\right)+c$

102 $\frac{e^x(\text{sen}\,x-\cos x)}{2}+c$

103 $\frac{3e^x\,\text{sen}\,3x}{10}+\frac{e^x\cos 3x}{10}+c$

104 $x\cdot\text{arc}\cos x-\sqrt{1-x^2}+c$

105 $\frac{x^2+1}{2}\,\text{arctg}\,x-\frac{x}{2}+c$

106 $2\sqrt{x+1}\,\text{arcsen}\,x+4\sqrt{1-x}+c$

107 $\sqrt{1+x^2}\,\text{arctg}\,x-\text{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})+c$

108 $2\left(\sqrt{2}-\sqrt{x-1}\,\text{arc}\,\text{sen}\sqrt{x}\right)+c$

109 $x(\text{arcsen}x)^2-2\text{arcsen}x\sqrt{2-x^2}-2x+c$

110 $\frac{x^2+1}{2}(\text{arctg}x)^2-x\,\text{arct}x+\frac{1}{2}\text{Ln}(1+x^2)+c$

111 $\frac{x}{2}(\text{sen}\,\text{Ln}\,x-\cos\text{Ln}\,x)+c$

112 $\frac{x}{2}(\cos\text{Ln}\,x+\text{sen}\,\text{Ln}\,x)+c$

113 $\frac{x-2}{x+2}e^x+c$

114 $\frac{1}{2}[(x^2-1)\text{sen}\,x-(x-1)^2\cos x]e^x+c$

115 $\text{Ln}\,\text{tg}\,\frac{x}{2}-\cos x\,\text{Ln}\,\text{tg}\,x$

116 $x\,\text{Ln}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$

117 $\sqrt{1+x^2}\,\text{Ln}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x$

118 $-\frac{(1-x)\,e^{\text{arctg}\,x}}{2\sqrt{1+x^2}}$

119 $\frac{(1+x)\,e^{\text{arctg}\,x}}{2\sqrt{1+x^2}}$

120 $\frac{e^x}{x+1}$

121 $\frac{e^{2x}}{8}(2-\operatorname{sen}2x-\cos 2x)$

122 $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+c$

123 $3\left[\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\right]+c$

124 $\frac{x\operatorname{arc\,sen}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1-x^2)+c$

125 $\operatorname{Ln}\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+c$

126 $x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+c$

127 $\operatorname{Ln}|k(x-2)(x+5)|$

128 $\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+2)^3}\right|$

129 $\operatorname{Ln}\frac{|x+1|}{\sqrt{2+1}}+c$

130 $\frac{1}{5}\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+c$

131 $\frac{x^2}{2}+\operatorname{Ln}\frac{(x^2+1)}{x}+c$

132 $\operatorname{Ln}\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+c$

133 $\frac{4}{x+2}+\operatorname{Ln}|x+1|+c$

134 $x+\frac{1}{x}+\operatorname{Ln}\frac{(x-1)^2}{|x|}+c$

135 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

136 $c-\frac{x}{(x^2-1)^2}$

137 $\frac{1}{x-1}+\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+c$

138 $\operatorname{Ln}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+c$

139 $\frac{1}{6}\operatorname{Ln}\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}+c$

140 $\frac{1}{3}\operatorname{Ln}\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

141 $\frac{1}{4}\operatorname{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$

142 $\frac{1}{4}\operatorname{Ln}\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$

143 $2x+\operatorname{Ln}\frac{x-2}{x^2(x+2)^3}+c$

144 $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)+c$

145 $x-\operatorname{arctg}x+\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+c$

146 $\frac{4x+7}{2(x+1)}+\operatorname{Ln}(x+1)+c$

147 $\operatorname{Ln}\left|\frac{(x-2)^2}{x^2-4x+1}\right|+\frac{x}{x^2-4x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+k$

148 $\operatorname{Ln}\frac{\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x-1}+c$

149 $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\operatorname{Ln}(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+c$

150 $\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{Ln}\,\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\,\text{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+c$

151 $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\text{Ln}\,(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4+\sqrt{2}}\,\text{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+c$

152 $\frac{1}{16}\,Lnx-\frac{1}{18}\,\text{Ln}\,(x^2+1)+\frac{7}{288}\,\text{Ln}\,(x^2+4)-\frac{1}{24\,(x^2+4)}+c$

153 $\frac{x}{216\,(x^2+9)}+\frac{x}{36\,(x^2+9)}+\frac{1}{648}\,\text{arctg}\,\frac{x}{3}+c$

154 $\frac{x-1}{2\,(x^2+9)}-\frac{1}{2}\,\text{Ln}\,|\,x+1\,|+\frac{1}{4}\,\text{Ln}\,(1+x^2)+c$

155 $\frac{3}{8}\,\text{arctg}\,(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8\,(x^2+2x+2)^2}+c$

156 $\frac{13x-159}{8\,(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\,\text{arctg}\,\frac{x-3}{2}+c$

157 $\frac{1}{16}\,\text{arctg}\,\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\,\frac{x}{x^2+4}+c$

158 $\frac{x}{8}\,(2x+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\,\text{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$

159 $\frac{1}{4}\,x\,(x^2+10)\sqrt{x^2+4}+6\,\text{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+c$

160 $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

161 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\text{Ln}\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|$

162 $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

163 $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\text{Ln}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

164 $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$

165 $4\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right)+c$

166 $-\frac{1}{3}\,\frac{2x+7}{\sqrt{7+4x+x^2}}+c$

167 $-\frac{1}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{1}{a^2}\,arc\sec\frac{x}{a}+c$

168 $\frac{33}{2}\text{arcsen}\frac{x-2}{5}-\frac{(x-98)}{25}\sqrt{21+4x-x^2}+k$

169 $\frac{a^2}{2}\left[\,arc\,\text{sen}\,\frac{x-a}{a}+\frac{(x-a)\sqrt{2ax-x^2}}{a^2}\right]+k$

170 $-\frac{x}{16\sqrt{x^2-16}}+k\quad,\quad|\,x\,|>4$

171 $\text{Ln}\left|\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+1\right|+c$

172 $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Ln}\,\frac{\sqrt{3}+\text{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\text{tg}\,\frac{x}{2}}+c$,

$si\ -\sqrt{3}<\text{tg}\,\frac{x}{2}<\sqrt{3}$

173 $x-\frac{2}{\text{tg}\,\frac{x}{2}+1}+c$

174 $\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\,\text{arctg}\,\frac{(c-a)\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+c}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}+c$

175 $-\frac{1}{\text{sen}\,a}\,Ln\left[\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}-\text{tg}\,\frac{a}{2}}{\text{tg}\,\frac{x}{2}+\text{tg}\,\frac{a}{2}}\right]+c$

176 $\frac{1}{\cos a}\,Ln\left[\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}-\text{tg}\,\frac{a}{2}}{\text{tg}\,\frac{x}{2}-\cot g\,\frac{a}{2}}\right]+c$

177 $\frac{2}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}}{3}\right)+c$

178 $\frac{a^2}{a^2-b^2}\,\text{arctg}\left(\frac{a+b}{a-b}\cdot\text{tg}\,\frac{x}{2}\right)+c$

179 $-\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\text{tg}\,\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1}$

180 $\frac{1}{3}\,\text{Ln}\left[\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\text{tg}\,\frac{x}{2}-2}\right]+c$

181 $\text{arctg}\left[\ \text{tg}\,\frac{x}{2}+1\right]\ +c$

182 $\frac{x}{2}+\text{arctg}\left[\frac{1+a}{1-a}\cdot\text{tg}\,\frac{x}{2}\right]+c$

183 $\frac{2}{\text{sen}^2\alpha}\left[\text{arctg}\,\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}+\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}-\cos\alpha}{\text{tg}^2\,\frac{x}{2}-2\cos\alpha\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+1}\right]$

184 $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\,\text{Ln}\,(\cos x+\text{sen}\,x)+c$

185 $\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\right)\ +c$

186 $\frac{2}{3}\,\text{arctg}\,\frac{5\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+4}{3}+c$

187 $\text{Ln}(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,tg\,\frac{x}{2}\right)+c$

188 $\frac{\cos x(\cos x-\text{sen}x)}{4}-\frac{1}{4}\text{Ln}\,|\cos x-\text{sen}\,x|+c$

189 $\frac{1}{2}\,\text{tg}\,x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arctg}\left(\sqrt{2}\,\text{tg}\,x\right)\ +c$

190 $\text{Ln}\,\frac{\left|\sqrt[2]{tgx-1}\right|}{\sqrt[6]{tg^2x+tgx+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\,\frac{2tgx+1}{\sqrt{3}}+c$

Integral indefinida - Cálculo integral

1. MÉTODOS MÁS SIMPLES DE INTEGRACIÓN

- En los ejercicios del 01 al 27 hallar las integrales, usando la tabla de integrales y aplicando las reglas elementales para la integración.

01. $\int \sqrt{x}\,dx$ **02.** $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$ **03.** $\int \frac{dx}{x^2}$

04. $\int 10^x\,dx$ **05.** $\int a^x e^x dx$ **06.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

07. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$ **08.** $\int 3,4x^{-0,17}dx$ **09.** $\int (1-2u)du$

10. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$ **11.** $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$

12. $\int (2x^{-1.2}+3x^{-0.8}-5^{0.38})dx$ **13.** $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$

14. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$ **15.** $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$ **16.** $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$ **18.** $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$ **19.** $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

20. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \operatorname{sen}^2 x}dx$ **21.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ **22.** $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$

23. $\int 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}dx$ **24.** $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)}$ **25.** $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}$

26. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\operatorname{sen}^2 x}$ **27.** $\int (\operatorname{arcsen} x+\arccos x)dx$

- En los ejercicios 28 al 105 hallar las integrales, aplicando el teorema sobre la invariancia de las fórmulas de integración.

28. $\int \operatorname{sen} x\,d(\operatorname{sen} x)$ **29.** $\int \operatorname{tg}^3 x\,d(\operatorname{tg} x)$ **30.** $\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$

31. $\int (x+1)^{15}\,dx$

32. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$

33. $\int \frac{dx}{(a+bx)^c}$ $(c \neq 1)$

34. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$

35. $\int \sqrt{8-2x}\,dx$

36. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}\,dx$

37. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

38. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

39. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx$

40. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

41. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4+x^5}}$

42. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$

43. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$

44. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx$

45. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x}$

46. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 dx}}$

47. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} 2x\,dx$

48. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

49. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{1+x^2}$

50. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)^2\sqrt{1-x^2}}$

51. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$

52. $\int \cos 3x\,d(3x)$

53. $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}$

54. $\int \cos 3x\,dx$

55. $\int (\cos\alpha - \cos 2x)\,dx$

56. $\int \operatorname{sen}(2x-3)\,dx$

57. $\int \cos(1-2x)\,dx$

58. $\int \left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2} dx$

59. $\int e^x(\operatorname{sen} e^x)\,dx$

60. $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

61. $\int \frac{d(\operatorname{arcsen} x)}{\operatorname{arcsen} x}$

62. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x-8}$

63. $\int \frac{dx}{2x-1}$

64. $\int \frac{dx}{cx+m}$

65. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

66. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$

67. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$

68. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+a^2}$

69. $\int \operatorname{tg} x\,dx$

70. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$

71. $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$

72. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)\,dx$

73. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

74. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

75. $\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx$

76. $\int e^{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x)$

77. $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$

78. $\int a^{3x}\,dx$

79. $\int a^{-x}\,dx$

80. $\int e^{-3x+1}\,dx$

81. $\int e^{x^2} x\,dx$

82. $\int e^{-x^3} x^2 dx$

83. $\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$

84. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

85. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

86. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

87. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$

88. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$

89. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$

90. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^4}}$

91. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4}$

92. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$

93. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}$

94. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$

95. $\int \frac{\cos\alpha\,dx}{a^2+\mathrm{sen}^2\alpha}$

96. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$

97. $\int (e^x+1)^3 dx$

98. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

99. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$

100. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

101. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$

102. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

103. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$

104. $\int \frac{2x-\sqrt{\mathrm{arcsen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

105. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

- En los ejercicios del 106 al 115 hallar las integrales, despejando la parte entera de la fracción bajo el signo de la integral.

106. $\int \frac{x}{x+4}dx$

107. $\int \frac{x}{2x+1}dx$

108. $\int \frac{Ax}{a+bx}dx$

109. $\int \frac{3+x}{3-x}dx$

110. $\int \frac{(2x-1)}{x-2}dx$

111. $\int \frac{x+2}{2x-1}dx$

112. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$

113. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

114. $\int \frac{x^4}{1-x}dx$

115. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$

- En los ejercicios del 116 al 132 hallar las integrales aplicando el método de descomposición de la expresión integrando y el método para despejar el cuadrado perfecto.

116. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$

117. $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

118. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$

119. $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$ **120.** $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$ **121.** $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$

122. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$ **123.** $\int \frac{dx}{4x^2-9}$ **124.** $\int \frac{dx}{2-3x^2}$

125. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$ **126.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$ **127.** $\int \frac{dx}{x-x^2-2,5}$

128. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ **129.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$ **130.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$

131. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$ **132.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$

♦ En los ejercicios 133 al 156 hallar las integrales aplicando fórmulas trigonométricas para transformar la expresión integrando.

133. $\int \cos^2 x\,dx$ **134.** $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ **135.** $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

136. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$ **137.** $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **138.** $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}dx$

139. $\int (\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)dx$ **140.** $\frac{\cos 2x\,dx}{1+\operatorname{sen} x\cos x}$ **141.** $\int \cos x\operatorname{sen} 3x\,dx$

142. $\int \cos 2x\cos 3x\,dx$ **143.** $\int \operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 5x\,dx$ **144.** $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$

145. $\int \frac{dx}{\cos x}$ **146.** $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx$ **147.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}dx$

148. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}$ **149.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}d\alpha$ **150.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

151. $\int \cos^3 x\,dx$ **152.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$ **153.** $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

154. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$ **155.** $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ **156.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$

2. MÉTODOS PRINCIPALES DE INTEGRACIÓN

Integración por partes:

♦ En los ejercicios del 157 al 193 hallar los integrales.

157. $\int x\operatorname{sen}2x\,dx$ **158.** $\int x\cos x\,dx$ **159.** $\int xe^{-x}\,dx$

160. $\int x3^{x}\,dx$

161. $\int x^{n}\ln x\,dx \quad (n \neq -1)$

162. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$

163. $\int \arccos x\,dx$

164. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

165. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

166. $\int x\operatorname{tg}^{2}x\,dx$

167. $\int x\cos^{2}x\,dx$

168. $\int \frac{\lg x}{x^{3}}\,dx$

169. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^{2}}}\,dx$

170. $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

171. $\int \ln(x^{2}+1)\,dx$

172. $\int \frac{x^{2}dx}{(1+x^{2})^{2}}$

173. $\int \frac{x^{3}\,dx}{\sqrt{1+x^{2}}}$

174. $\int x^{2}\ln(1+x)\,dx$

175. $\int x^{2}e^{-x}\,dx$

176. $\int x^{3}e^{x}dx$

177. $\int x^{2}x^{a}dx$

178. $\int x^{3}\operatorname{sen} x\,dx$

179. $\int x^{2}\cos^{2}x\,dx$

180. $\int \ln^{2}x\,dx$

181. $\int \frac{\ln^{3}x}{x^{2}}\,dx$

182. $\int \frac{\ln^{2}x}{\sqrt{x^{5}}}\,dx$

183. $\int (\operatorname{arc\,sen} x)^{2}\,dx$

184. $\int (\operatorname{arctg} x)^{2}\,x\,dx$

185. $\int e^{x}\operatorname{sen} x\,dx$

186. $\int e^{3x}(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)\,dx$

187. $\int e^{ax}\cos nx\,dx$

188. $\int \operatorname{sen}\ln x\,dx$

189. $\int \cos\ln x\,dx$

190. $\int \frac{x^{2}\,dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$

191. $\int \sqrt{a^{2}+x^{2}}\,dx$

192. $\int \frac{x^{2}e^{x}\,dx}{(x+2)^{2}}$

193. $\int x^{2}e^{x}\operatorname{sen} x\,dx$

Cambio de variable:

♦ En los ejercicios 194 al 229 hallar las integrales.

194. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (sustituyendo $x+1=z^{2}$)

195. $\int \frac{x^{3}\,dx}{\sqrt{x-1}}$

196. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^{3}}\,dx$

197. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

198. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

199. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

200. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$

201. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

202. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

203. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$

204. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (sustituyendo $x=z^{6}$)

205. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}-1)}$ **206.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ **207.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$

208. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (sustituyendo $e^x+1=z^4$) **209.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

210. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$ **211.** $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot \text{sen}\,2x\cdot\cos 2x\,dx$

212. $\int \frac{\ln \text{tg}\,x}{\text{sen}\,x\cdot\cos x}\,dx$ **213.** $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$ **214.** $\int \frac{x^5 dx}{(x^2-4)^2}$

215. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ (sustituyendo $x=\frac{1}{z}$, o $x=a\,\text{tg}\,z$, o $x=a\,\text{sh}\,z$)

216. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (sustituyendo $x=a\,\text{sen}\,z$)

217. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (sustituyendo $x=\frac{1}{z}$, o $x=\frac{a}{\cos z}$, o $x=a\,\text{ch}\,z$)

218. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$ **219.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$ **220.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

221. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx$ **222.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ **223.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

224. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^3}$ **225.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ **226.** $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$

227. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$ **228.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ **229.** $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}$

- En los ejercicios 230 al 234 hallar las integrales efectuando primero el cambio de variables y luego integrando por partes.

230. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ **231.** $\int \text{sen}\,\sqrt[3]{x}\,dx$ **232.** $\int \frac{\text{arcsen}\,x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

233. $\int \frac{x^2\,\text{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$ **234.** $\int \frac{\text{arctg}\,x}{x^2(1+x^2)}\,dx$

Diversos Problemas:

- En los ejercicios 235 al 180 hallar las integrales:

235. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$

236. $\int (1+e^{3x})^2 e^{3x}dx$

237. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

238. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\cos x}}\,dx$

239. $\int \sqrt{1-e^{x}}e^{x}\,dx$

240. $\int x\cos x^2 dx$

241. $\int (2-3x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{3}}dx$

242. $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx$

243. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}$

244. $\int \frac{dx}{e^{x}(3+e^{-x})}$

245. $\int \frac{dx}{e^{x}\sqrt{1-e^{-2x}}}$

246. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

247. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx$

248. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

249. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$

250. $\int \frac{\ln x\,dx}{x(1-\ln^2 x)}$

251. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx$

252. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2}\,dx$

253. $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi}$

254. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$

255. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x\,dx}{\cos^6 x}$

256. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\,\sec^4 x\,dx$

257. $\int (1-\operatorname{tg}3x)^2\,dx$

258. $\int \frac{x^3\,dx}{x+1}$

259. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$

260. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$

261. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}$

262. $\int x\sqrt{a+x}\,dx$

263. $\int (\sqrt{\operatorname{sen} x}+\cos x)^2\,dx$

264. $\int a^{mx}b^{nx}\,dx$

265. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

266. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$

267. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$

268. $\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$

269. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$

270. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

271. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}$

272. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

273. $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12}$

274. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$

275. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\,dx$

276. $\int \frac{(4-3x)\,dx}{\sqrt{5x^2+6x+18}}$

277. $\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$

278. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$

279. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2x+3}}$

280. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$

281. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

282. $\int x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

283. $\int x^2 \cos \omega x\,dx$

284. $\int e^{2x} x^3\,dx$

285. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\,dr$

286. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \operatorname{sen} x}\,dx$

287. $\int \frac{x^7\,dx}{(1+x^4)^2}$

288. $\int \frac{\cos^2 3x}{\operatorname{sen} 3x}\,dx$

289. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} 3x}$

290. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{4-\cos^2 2x}$

291. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

292. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

293. $\int e^{e^x+x}\,dx$

294. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx$

295. $\int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}}\,dx$

296. $\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

297. $\int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

298. $\int e^x \operatorname{sen}^2 x\,dx$

299. $\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)\,dx}{\operatorname{sen} 2x}$

300. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$

301. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi}$

302. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+\operatorname{sen} x}$

303. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)}\,dx$

304. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen} x}\,dx$

305. $\int \frac{\ln \ln x}{x}\,dx$

306. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

307. $\int e^{-x^2} x^5\,dx$

308. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

309. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

310. $\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{x}\,dx$

311. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$

312. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\,dx$

313. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\,dx$

314. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

315. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$

316. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$

317. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

318. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

319. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$

320. $\int \frac{x^7\,dx}{(1-x^2)^5}$

321. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}$

322. $\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}\,dx$

323. $\int \frac{x\,dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}$

324. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$

325. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x-1)}$

326. $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$

327. $\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^3}$ 328. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x\,dx$ 329. $\int \frac{e^x(1+e^x)\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

330. $\int \sqrt{e^x\ 1}\,dx$ 331. $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$ 332. $\int \frac{dx}{x^6+x^4}$

333. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$ 334. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$ 335. $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{14} x}}\,dx$

336. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$

3. TIPOS PRINCIPALES DE LAS FUNCIONES INTEGRALES

Funciones fraccionarias racionales:

- En los ejercicios 337 al 346 hallar las integrales.

1) El denominar tiene solo distintas raíces reales.

337. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$ 338. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$ 339. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$

340. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$ 341. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$ 342. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$

343. $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$ 344. $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$

345. $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6}$ 346. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4z}\,dx$

2) El denominador tiene sólo raíces reales; algunas raíces son múltiples.

347. $\int \frac{(x^2-3x+2)\,dx}{x(x^2+2x+1)}$ 348. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$ 349. $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$

350. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$ 351. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$ 352. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

353. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$ 354. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx$ 355. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$

356. $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$ 357. $\int \frac{(x^2-2x+3)\,dx}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$ 358. $\int \frac{(7x^3-9)\,dx}{x^4-5x^3+6x^2}$

359. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2}\,dx$ 360. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$

3) El denominador tiene distintas raíces complejas.

361. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ 362. $\int \frac{dx}{1+x^3}$ 363. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$

364. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ 365. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$ 366. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$

367. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$ 368. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ 369. $\int \frac{(3x^2+x+3)\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$

370. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$ 371. $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}$

372. $\int \frac{dx}{1+x^4}$

4) El denominar tiene raíces complejas múltiples.

373. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$ 374. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$ 375. $\int \frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$

376. $\int \frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$ 377. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$ 378. $\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$

379. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ 380. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$

5) Método de Ostrogradski.

381. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$ 382. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ 383. $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx$

384. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$ 385. $\int \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)^3}$

386. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$ 387. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$ 388. $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$

389. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx$ 390. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx$

391. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,dx$ 392. $\int \frac{9\,dx}{5x^2(3-2x^2)^3}$

Algunas funciones irracionales:

♦ En los ejercicios 393 al 414 hallar los integrales.

1) Funciones de la forma $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$

393. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$

394. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$

395. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}$

396. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$

397. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$

398. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$

399. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$

400. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5}}$

2) Binomios diferenciales $x^m\,(a+bx^n)^p\,dx$

401. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$

402. $\int x^{-1}\,(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}\,dx$

403. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

404. $\int x^5\,\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$

405. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

406. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

407. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$

408. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

409. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

410. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$

411. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$

412. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$

413. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx$

414. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

Funciones trigonométricas:

♦ En los ejercicios 415 al 456 hallar las integrales.

415. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx$

416. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx$

217. $\int \frac{dx}{\cos x\cdot\operatorname{sen}^3 x}$

418. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}\,dx$

419. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\operatorname{sen}^3 x}$

420. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x\cos^4 x}$

421. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(1-\cos x)^2}$

422. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^2}$

423. $\int \cos^6 x\,dx$

424. $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx$

425. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$

426. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$

427. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x}$

428. $\int \frac{\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

429. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$

430. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

431. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\operatorname{sen} x}$

432. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos 2x}$

433. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\operatorname{sen} x \cdot \cos 3x}$

434. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$

435. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

436. $\int \frac{dx}{5 + 4\operatorname{sen} x}$

437. $\int \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2 + \cos x}\, dx$

438. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\, dx}{1 - \operatorname{tg} x}$

439. $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x}$

440. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + 2\sec x)^2}$

441. $\int \frac{dx}{5 - 4\operatorname{sen} x + 3\cos x}$

442. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\operatorname{sen}^2 x}$

443. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

444. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{seh}^4 x}$

445. $\int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x}$

446. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$

447. $\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}$

448. $\int \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}\, dx$

449. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx$

450. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^3 2x}}{\operatorname{sen}^5 x}\, dx$

451. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x \cos^5 x}}$

452. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^4 x}}$

453. $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x}\, dx$

454. $\int \frac{(\cos 2x - 3)\, dx}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}}$

455. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$

456. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x\, dx}$

<u>Funciones hiperbólicas:</u>

- En los ejercicios 457 al 475 hallar las integrales.

457. $\int \operatorname{ch} x\, dx$

458. $\int \operatorname{sh} x\, dx$

459. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$

460. $\int \frac{e^x\, dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$

461. $\int (\operatorname{sh}^2 ax + \operatorname{sh}^2 ax)\, dx$

462. $\int \operatorname{sh}^2 x\, dx$

463. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx$

464. $\int \operatorname{cth}^2 x\, dx$

465. $\int \operatorname{sh}^3 x\, dx$

466. $\int \text{ch}^3 x\, dx$ 467. $\int \text{th}^4 x\, dx$ 468. $\int \text{sh}^2 x\, \text{ch}^3 x\, dx$

469. $\int \text{cth}^5 x\, dx$ 470. $\int \frac{dx}{\text{sh}\, x\, \text{ch}\, x}$ 471. $\int \frac{dx}{\text{sh}\, x}$

472. $\int \frac{dx}{(1+\text{ch}\, x)^2}$ 473. $\int \sqrt{\text{th}\, x\, dx}$ 474. $\int \frac{x\, dx}{\text{ch}^2 x}$

475. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\text{sh}^4 x}$

__Funciones racionales de__: ***x y*** $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

♦ En los ejercicios 476 al 499 hallar las integrales

476. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ 477. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ 478. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$

479. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ 480. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\, dx$ 481. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$

482. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$ 483. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\, dx$ 484. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\, dx$

485. $\int \sqrt{1-4x-x^2}\, dx$ 486. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$ 487. $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$

488. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ 489. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ 490. $\int \frac{(2x^2-3x)\, dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

491. $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x+x^2}}\, dx$ 492. $\int \frac{3x^3\, dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ 493. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$

494. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\, dx$ 495. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ 496. $\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$

497. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\, dx$ 498. $\int \frac{(x-1)\, dx}{x^3\sqrt{2x^2-2x+1}}$ 499. $\int \frac{(2x+3)\, dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$

__Diversas funciones:__

♦ En los ejercicios 500 al 555 hallar las integrales

500. $\int \frac{x^3\, dx}{(x-1)^{12}}$ 501. $\int \frac{x\, dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$ 502. $\int x\sqrt[3]{a+x}\, dx$

503. $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$ 504. $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ 505. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$

506. $\int \frac{dx}{1-x^4}$ 507. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$ 508. $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{\sqrt{x+1}}$

509. $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx$ 510. $\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx$

511. $\int \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})\,dx$ 512. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x\,dx}{x^2}$

513. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ 514. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ 515. $\int (x^3-2x^2+5)e^{3x}dx$

516. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$ 517. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ 518. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

519. $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}\,dx$ 520. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 521. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,\frac{dx}{x}$

522. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}$ 523. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx$ 524. $\int \frac{x^4\,dx}{x^{15}-1}$

525. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}2x-2\operatorname{sen}x}$ 526. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ 527. $\int \frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}$

528. $\int x\ln(1+x^3)\,dx$ 529. $\int \frac{(\ln x-1)\,dx}{\ln^2 x}$ 530. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$

531. $\int x^2e^x\cos x\,dx$ 532. $\int xe^{x^2}(x^2+1)\,dx$ 533. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 x\cos^5 x}}$

534. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\cos^4 x}$ 535. $\int \frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}$ 536. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}x+\cos x}$

537. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}\,dx$ 538. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$ 539. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$

540. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}$ 541. $\int \frac{xe^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}$ 542. $\int \frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{x^4}$

543. $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^2}\,dx$ 544. $\int \frac{\operatorname{arctg}x}{(1+x)^3}\,dx$ 545. $\int \frac{dx}{(1-2^x)^4}$

546. $\int \frac{(e^{3x}+e^x)\,dx}{e^{4x}-e^{2x}+1}$ 547. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$ 548. $\int \frac{\operatorname{tg}x\,dx}{1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x}$

549. $\int \operatorname{sen}^8 x\, dx$

550. $\int \frac{(3+x^2)^2 x^3\, dx}{(1+x^2)^3}$

551. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\, dx$

552. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}$

553. $\int \frac{(x+\operatorname{sen} x)\, dx}{1+\cos x}$

554. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

555. $\int e^{\operatorname{sen} x}\, \frac{x\cos^3 x-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

Métodos para calcular integrales definidas Integrales Impropias

1. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN EXACTA.

Aplicación directa de la fórmula de Newton Leibniz:

- En los ejercicios 556 al 583 calcular las integrales

556. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$

557. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

558. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

559. $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\, dx$

560. $\int_0^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right) dt$

561. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$

562. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\, dx$

563. $\int_0^{2a} \frac{3\, dx}{2b-x}\ (b>\alpha>0)$

564. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2}$

565. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

566. $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}\, dx$

567. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}\, dx}{x^2}$

568. $\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}$

569. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

570. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3\, dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$

571. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dx}{(x-a)(x-2a)}$

572. $\int_2^3 \frac{dx}{2x^3+3x-2}$

573. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

574. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

575. $\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

576. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

577. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \operatorname{sen} x\, 2x\, dx$

578. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$

579. $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \operatorname{sen}^2(\omega x + \varphi_0)\, dx$

580. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}$

581. $\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^4 \varphi\, d\varphi$

582. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{12}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x^2}\, dx$

583. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen}\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt$

♦ En los ejercicios 584 al 593 hallar las integrales integrándolas por partes.

584. $\int_0^1 xe^{-x}\, dx$

585. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$

586. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

587. $\int_0^\pi x^3 \operatorname{sen} x\, dx$

588. $\int_1^2 x\log_2 x\, dx$

589. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$

590. $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3\, dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$

591. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

592. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx$

593. $\int_1^e \ln^3 x\, dx$

594. Deducir las fórmulas de recurrencia para calcular las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ y $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx$ (n es un entero positivo o cero) y calcular las integrales:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 x\, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\, dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{11} x\, dx$

595. Deducir la fórmula de recurrencia para calcular la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ (m y n son enteros positivos o ceros; examinar los casos particulares de valores pares e impares de m y n).

596. Deducir la fórmula de recurrencia y calcular la integral $\int_{-1}^{0} x^n e^x\, dx$ (n es un entero positivo).

597. Demostrar la fórmula de recurrencia:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

(n es un entero positivo) y mediante ésta calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

598. Demostrar que si $J_m = \int_1^e \ln^m x\, dx$, se tiene $J_m = e - mJ_{m-1}$ (es un entero positivo).

599. Hallar la integral $\int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx$ (p y q son enteros positivos).

Cambio de variable en la integral definida:

- En los ejercicios 600 al 620 calcular las integrales.

600. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$ **601.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$ **602.** $\displaystyle\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$

603. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$ **604.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$ **605.** $\displaystyle\int_3^{23} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2\,dx}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$

606. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^6 \frac{x}{2}\,dx$ **607.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x\,dx$ **608.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}$

609. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$ **610.** $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx$ **611.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

612. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$ **613.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3\,dx}$ **614.** $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

615. $\displaystyle\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$ **616.** $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ **617.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}$

618. $\displaystyle\int_{2,5}^5 \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4}\,dx$ **619.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ **620.** $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$

Distintos problemas:

621. Calcular el valor medio de la función $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $[1,4]$.

622. Calcular el valor medio de la función $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ en el intervalo $[1;1{,}5]$.

623. Calcular el valor medio de las funciones $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $[0,\pi]$.

624. Calcular el valor medio de la función $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$ en el intervalo $[0,2]$.

625. ¿Para qué valor de a el valor medio de la función $y=\ln x$ en el intervalo $[1,a]$ es igual a la velocidad media con que varía la función en este intervalo?

- En los ejercicios 626 al 642 calcular las integrales.

626. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

627. $\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9\,dx}{(1+x^5)^3}$

628. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}$

629. $\int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}\,dx}{(1+x^8)^{\frac{2}{5}}}$

630. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

631. $\int_{-a}^{+a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

632. $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,dx$

633. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$

634. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$

635. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

636. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\text{sen}\,x}{\cos^3 x}\,dx$

637. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$

638. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\text{sen}^2 x}$

639. $\int_0^1 (\text{arcsen}\,x)^4\,dx$

640. $\int_1^{16} \text{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$

641. $\int_0^1 \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2+4x+1)^{\frac{5}{2}}}$

642. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\,x\cos x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\text{sen}^2 x}$

643. Mostrar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\text{sen}^2 x}=\frac{\pi}{2}$, donde a y b son cualesquiera números reales distintos de cero.

644. Resolver la ecuación $\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$

645. Resolver la ecuación $\int_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{e^{x}-1}} = \frac{\pi}{6}$

646. Al quedarse convencido de la validez de las desigualdades $\frac{x}{e} > \ln x > 1$ para $x > e$, mostrar que la integral $\int_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$ es menor que 1, pero mayor que 0,92.

647. Mostrar que $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}523 < \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^{2}-x^{3}}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}555$

648. Mostar que $0{,}5 < \int_{0}^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{\pi}{6} \approx 0{,}523 \quad (n \ge 1)$

649. Valiéndose de la desigualdad $\operatorname{sen} x > x - \frac{x^{3}}{6}$, que es válida para $x > 0$, y de la desigualdad de Cauchy - Buniakovski, evaluar la integral $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \operatorname{sen} x}\, dx$.

650. Mostar que $0{,}78 < \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{4}}} < 0{,}93$

651. Hallar los valores máximos y mínimo de la función $J(x) = \int_{0}^{x} \frac{2t+1}{t^{2}-2t+2}\, dt$ en el intervalo $[-1, 1]$

652. Hallar el punto extremo y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = \int_{0}^{x} (t-1)(t-2)^{2}\, dt$.

♦ En los ejercicios 653 al 665 demostrar la validez de las igualdades sin calcular las integrales.

653. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10}\operatorname{sen}^9 x\, dx = 0$

654. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x}\, dx = 0$

655. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{\cos x}\, dx = 2\int_{0}^{1} e^{\cos x}\, dx$

656. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\, dx = 0$

657. a) Mostrar que si $f(t)$ es una función impar, $\displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\, dt$ es una función par, es decir, que $\displaystyle\int_{a}^{-x} f(t)\, dt = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$

b) ¿Será la función $\displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\, dt$ impar, se la función $f(t)$ es par?

658. Demostrar la validez de la igualdad $\displaystyle\int_{x}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ $(x > 0)$

659. Demostrar la identidad $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t\, dt}{1+t^2} \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$

660. Demostrar la identidad $\displaystyle\int_{0}^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen}\sqrt{t}\, dt + \int_{0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$

661. Demostrar la validez de la igualdad $\displaystyle\int_{0}^{1} x^m(1-x)^n\, dx = \int_{0}^{1} x^n(1-x)^m\, dx$

662. Demostrar la validez de la igualdad $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

663. Demostrar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx$. Aplicar el resultado obtenido para calcular las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ y $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

664. Demostrar que:

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot 2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx .$$

Aplicar el resultado obtenido para aplicar la integral $\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

665. Mostrar que si la función $f(x)$ es periódica cuyo período es igual a T, se tiene que $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ no depende de a.

Integral indefinida - Cálculo integral

1. MÉTODOS MÁS SIMPLES DE INTEGRACIÓN.

01. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$ **02.** $\frac{mx^{\frac{n}{m}+1}}{n+m}+C$ **03.** $C-\frac{1}{x}$

04. $\approx 0{,}4343\cdot 10^x+C$ **05.** $\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$ **06.** $\sqrt{x}+C$

07. $\sqrt{\frac{2h}{g}}+c$ **08.** $\approx 4{,}1x^{0{,}83}+C$ **09.** $u-u^2+C$

10. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$ **11.** $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$

12. $C-10x^{-0{,}2}+15x^{0{,}2}-3{,}62x^{1{,}38}$ **13.** $z-2\ln|z|-\frac{1}{z}+C$

14. $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$ **15.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$

16. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$ **17.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}x+C$

18. $3x-\frac{2(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+C$ **19.** $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+C$ **20.** $C-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x$

21. $\operatorname{tg}x-x+C$ **22.** $C-\operatorname{ctg}x-x$ **23.** $x-\operatorname{sen}x+C$

24. $\operatorname{arctg}x-\frac{2}{x}+C$ **25.** $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$ **26.** $\operatorname{tg}x+C$

27. $\frac{\pi}{2}x+C$ **28.** $\frac{\operatorname{sen}^2x}{2}+C$ **29.** $\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}+C$

30. $2\sqrt{1+x^2}+C$ **31.** $\frac{(x+1)^{16}}{16}+C$ **32.** $C-\frac{1}{8(2x-3)^4}$

33. $\frac{(a+bx)^{1-c}}{b(1-c)}+C$ **34.** $C-\frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}}$ **35.** $C-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$

36. $\frac{3m}{b}\sqrt[3]{a+bx}+C$ **37.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$ **38.** $C-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$

39. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$ **40.** $\sqrt{x^2+1}+C$ **41.** $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$

42. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$ **43.** $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$ **44.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4x+C$

45. $\sec x+C$ **46.** $3\sqrt[3]{\operatorname{sen}x}+C$ **47.** $C-\frac{2}{5}\cos^5x$

48. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$ **49.** $\frac{(\operatorname{arctg})^3}{3}+C$ **50.** $C-\frac{1}{2(\operatorname{arcsen}x)^2}$

51. $2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+C$

52. $\operatorname{sen} 3x+C$

53. $\operatorname{tg}(1+\ln x)+C$

54. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+C$

55. $x\cos\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+C$

56. $C-\frac{1}{2}\cos(2x-3)$

57. $C-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(1-2x)$

58. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$ ó $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} 4x-\sec 4x)+C$

59. $C-\cos(e^x)$

60. $\ln(1+x^2)+C$

61. $\ln|\operatorname{arcsen} x|+C$

62. $\ln(x^2-3x+8)+C$

63. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$

64. $\frac{1}{c}\ln|cx+m|+C$

65. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

66. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$

67. $\ln(e^x+1)+C$

68. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2)+C$

69. $C-\ln|\cos x|$

70. $\ln|\operatorname{sen} x|+C$

71. $C-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$

72. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}(2x+1)|+C$

73. $C-\ln(1+\cos^2 x)$

74. $\ln|\ln x|+C$

75. $\frac{\ln^{m+1} x}{m+1}+C$, si $m\neq -1$ y $\ln|\ln x|+C$, si $m=-1$

76. $e^{\operatorname{sen} x}+C$

77. $e^{\operatorname{sen} x}+C$

78. $\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C$

79. $C-\frac{a^{-x}}{\ln a}$

80. $C-\frac{e^{1-3x}}{3}$

81. $0{,}5e^{x^2}e^{x^2}+C$

82. $C-\frac{1}{3}e^{-x^3}$

83. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+C$

84. $\frac{1}{5}\operatorname{arcsen} 5x+C$

85. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x+C$

86. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+C$

87. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$

88. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2}+C$

89. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$

90. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x^2}{a}+C$

91. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$

92. $\frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x^4+C$

93. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$

94. $\frac{\operatorname{arcsen} 2^x}{\ln 2}+C$

95. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}+C$

96. $e^x+e^{-x}+C$

97. $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x+C$

98. $\operatorname{arcsen} x-\sqrt{1-x^2}+C$

99. $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$

100. $\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}+C$

101. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$

102. $\operatorname{arcsen} x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$

103. $\frac{2}{3}[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}]-x+C$

104. $C-2\sqrt{1-x^2}-\frac{-2}{3}\sqrt{(\operatorname{arcsen} x)^3}$

105. $C-\frac{1}{9}[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3]$

106. $x-4\ln|x+4|+C$

107. $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]+C$

108. $\frac{A}{b}\left[x-\frac{a}{b}\ln|bx+a|\right]+C$

109. $C-x-6\ln|3-x|$

110. $2x+3\ln|x-2|+C$

111. $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x-1|+C$

112. $x+\ln(x^2+1)+C$

113. $x-2\operatorname{arctg}x+C$

114. $C-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|$

115. $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$

116. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

117. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

118. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$

119. $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{b-x}{a-x}\right|+C$

120. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

121. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$

122. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$

123. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$

124. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$

125. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$

126. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

127. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$

128. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$

129. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x+3)+C$

130. $\operatorname{arcsen}(x-2)+C$

131. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x-1}{3}+C$

132. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$

133. $\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$

134. $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$

135. $C-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

136. $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+C$

137. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C$

138. $2\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})-x+C$

139. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$

140. $\ln(2+\operatorname{sen}2x)+C$

141. $C-\frac{1}{4}(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x)$

142. $\frac{1}{10}\operatorname{sen}5x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+C$

143. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}3x-\frac{1}{14}\operatorname{sen}7x+C$

144. $\frac{1}{8}(2x+\operatorname{sen}2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}6x)+C$

145. $\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})\right|+C$

146. $\ln(1+\operatorname{sen}x)+C$

147. $\frac{\cos^2x}{2}-\ln|\cos x|+C$

148. $\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3x}+C$

149. $2\sqrt{\cos\alpha}\,(\frac{\cos^2\alpha}{5}-1)+C$

150. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$

151. $\operatorname{sen}x-\frac{\operatorname{sen}^3x}{3}+C$

152. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}x+x+C$

153. $C-\cos x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3x-\frac{1}{5}\cos^5x$

154. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen}4x+C$

155. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln|\cos x|+C$

156. $C-\operatorname{ctg}x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5x$

2. MÉTODOS PRINCIPALES DE INTEGRACIÓN.

Integración por partes:

157. $\frac{1}{4}\text{sen}2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + C$

158. $x\,\text{sen}\,x + \cos x + C$

159. $C - e^{-x}(x+1)$

160. $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3 - 1) + C$

161. $\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$

162. $\frac{x^2+1}{2}\text{arctg}\,x - \frac{x}{2} + C$

163. $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

164. $x\,\text{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \text{acrtg}\sqrt{x} + C$

165. $2\sqrt{x+1}\,\text{arcsen}\,x + 4\sqrt{1-x} + C$

166. $x\,\text{tg}\,x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C$

167. $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$

168. $C - \frac{1}{2x^2}\lg(x\sqrt{e})$

169. $\sqrt{1+x^2}\,\text{arctg}\,x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$

170. $2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\,\text{arcsen}\sqrt{x}) + C$

171. $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\text{arctg}\,x + C$

172. $C - \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\text{arctg}\,x$

173. $x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(2+x^2)^3} + C$

174. $\frac{(x^3+1)\ln(2+x)}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C$

175. $C - e^{-x}(2 + 2x + x^2)$

176. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

177. $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{2}{\ln^3 a}\right) + C$

178. $C - x^3\cos x + 3x^2\text{sen}x + 6x\cos x - 6\,\text{sen}\,x$

179. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\text{sen}\,2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\text{sen}\,2x + C$

180. $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$

181. $C - \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$

182. $C - \frac{8}{28\sqrt{x^3}}(\frac{9}{4}\ln^2 + 3\ln x + 2)$

183. $x(\text{arcsen}\,x)^2 + 2\text{arcsen}\,x\cdot\sqrt{2-x^2} - 2x + C$

184. $\frac{x^2+1}{2}(\text{arctg}\,x)^2 - x\,\text{arctg}\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

185. $\frac{e^x(\text{sen}\,x - \cos x)}{2} + C$

186. $\frac{e^{3x}}{13}(\text{sen}\,2x - 5\cos 2x) + C$

187. $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\,\text{sen}\,nx + a\cos nx) + C$

188. $\frac{x}{2}(\text{sen}\ln x - \cos\ln x) + C$

189. $\frac{x}{2}(\cos\ln x + \text{sen}\ln x) + C$

190. $C - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$

(Poner $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, y luego $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ transformar a la forma $\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$)

191. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

192. $\frac{x-2}{x+2}a^x + C$

193. $\frac{1}{2}[(x^2-1)\operatorname{sen} x - (x-1)^2\cos x]e^x + C$

Cambio de Variable:

194. $2[\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})] + C$

195. $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16) + C$

196. $C - \frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}$

197. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$

198. $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$

199. $2[\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})] + C$

200. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$

201. $2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) + C$

202. $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| + C$

203. $\frac{2}{a}[\sqrt{ax+b} - m\ \ln|\sqrt{ax+b}+m|] + C$

204. $x + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + C$

205. $3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}-1| + C$

206. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1+\sqrt[4]{x}) + C$

207. $\frac{6}{5}[\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|] + C$

208. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt{(e^x+1)^3} + C$

209. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$

210. $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1| + C$

211. $0.4\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}(3-2\cos^2 x) + C$

212. $\frac{1}{2}\ln^2 \operatorname{tg} x + C$

213. $C - \frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}(2a^3+x^3)$

214. $\frac{x^2-4}{2} + \frac{8}{x^2-4} + 4\ln|x^2-4| + C$

215. $C - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$

216. $\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$

217. $C - \frac{1}{a}\operatorname{arcsen}\frac{a}{|x|}$

218. $C - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$

219. $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen} x$

220. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

221. $C - \frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}$

222. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$

223. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + C$

224. $C - \frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$

225. $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C$

226. $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right| + C$

227. $\arccos\frac{1}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$ (Se puede realizar la sustitución $x = \frac{1}{x}$)

228. $2\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + C$ (Se puede realizar la sustitución $x = \operatorname{sen}^2 z$)

229. $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C$ (Multiplicar el numerador y el dominador por e^x, y poner $xe^x = z$)

230. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$

231. $3[(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}] + C$

232. $\frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

233. $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$

234. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$

Diversos Problemas:

235. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x)^3} + C$

236. $\frac{1}{9}(1+e^{3x})^3 + C$

237. $2e^{\sqrt{x}} + C$

238. $e^{-\cos x} + C$

239. $C - \frac{2}{3}(1-e^x)^{\frac{3}{2}}$

240. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C$

241. $C - \frac{5}{24}(2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{6}{5}}$

242. $C - \frac{1}{3}\ln|1+3x^3-x^6|$

243. $\frac{2}{3}\ln(1+x^{\frac{3}{2}}) + C$

244. $C - \ln(3+e^{-x})$

245. $C - \operatorname{arcsen} e^{-x}$

246. $2\sqrt{1+x^2} + 3\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$

247. $\frac{1}{9}[2\sqrt{9x^2-4} - 3\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|] + C$

248. $2\operatorname{sen}\sqrt{x} + C$

249. $\text{arcsen}\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$ **250.** $C-\frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x|$ **251.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$

252. $\frac{(\text{arctg}\,x)^{n+1}}{n+1}+C$, si $n\neq -1$ y $\text{Ln}|\text{arctg}\,x|$, si $n=-1$.

253. $C-2\,\text{ctg}\,2\varphi$ **254.** $2x-\text{tg}\,x+C$ **255.** $\frac{1}{5}\text{tg}^5 x+C$

256. $\frac{2}{45}\sqrt{\text{tg}^5 x}\,(5\,\text{tg}^2 x+9)+C$ **257.** $\frac{1}{3}(\text{tg}\,3x+\ln\cos^2 3x)+C$

258. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$ **259.** $C-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$

260. $\frac{\sqrt{2+4x}\,(x-1)}{6}+C$ **261.** $x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$

262. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$

263. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\text{sen}\,2x+\frac{4}{3}\sqrt{\text{sen}^3 x}-\cos x+C$ **264.** $\frac{a^{mx}b^{nx}}{m\ln a+n\ln b}+C$

265. $C-\ln[1-x+\sqrt{5-2x+x^2}\,]$

266. $\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C$ **267.** $\frac{1}{3}\text{arcsen}\,\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$

268. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\,\text{arcsen}\frac{x-1}{\sqrt{6}}$ **269.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\text{arctg}\,(x+1)+C$

270. $C-\sqrt{3-2x-x^2}-4\,\text{arcsen}\frac{x+1}{2}$ **271.** $\frac{3}{8}\left[\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\text{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$

272. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln(x+1+\sqrt{x+2x+2})+C$ **273.** $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$

274. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$

275. $C-\ln|2x^2-3x+1|$

276. $\frac{29}{45}\text{arctg}\,\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+C$

277. $\frac{61}{16}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$

278. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}\right|+C$

279. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}})+C$

280. $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\text{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$ **281.** $x\,\text{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

282. $\frac{1}{8}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+C$ **283.** $\frac{1}{\omega^3}[(\omega^2x^2-2)\operatorname{sen}\omega x+2\omega x\cos\omega x]+C$

284. $e^{2x}(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8})+C$ **285.** $\operatorname{tg}x\cdot\ln(\cos x)+\operatorname{tg}x-x+C$

286. $\ln|\ln\operatorname{sen}x|+C$ **287.** $\frac{1}{4}\left[\ln(1+x^4)+\frac{1}{1+x^4}\right]+C$

288. $\frac{1}{3}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|+\cos 3x\right)+C$ **289.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2})+C$

290. $C-\frac{1}{8}\ln\frac{2+\cos 2x}{2-\cos 2x}$ **291.** $\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C$

292. $2\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})+C$ **293.** $e^{e^x}+C$

294. $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$ **295.** $\frac{1}{\sqrt{2}}[3\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}]+C$

296. $x-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x+C$ **297.** $C-\frac{1}{2}(\frac{x}{\operatorname{sen}^2x}+\operatorname{ctg}x)$

298. $\frac{e^x}{2}(1-\frac{2\operatorname{sen}2x+\cos 2x}{5})+C$ **299.** $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\ln|\operatorname{tg}x|)+C$

300. $\ln|\operatorname{sen}x+\cos x|+C$ **301.** $\frac{1}{2}\ln\left|tg(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6})\right|+C$

302. $\sec x-\operatorname{tg}x+x+C$ **303.** $\operatorname{sen}x-\operatorname{arctg}\operatorname{sen}x+C$

304. $\sqrt{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{4}|+C$ **305.** $\ln x\cdot\ln\ln x-\ln x+C$ **306.** $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2}+C$

307. $C-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$ **308.** $\frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{1+2x^2}+C$

309. $C-\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}x$

310. $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-a^2)^5}-\frac{a^2}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+a^4\sqrt{x^2-a^2}+a^5\operatorname{arcsen}\frac{a}{|x|}+C$

311. $\frac{\sqrt{4+x^2}(x^2-2)}{24x^3}+C$ **312.** $\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{24x^3}+C$ **313.** $\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}(x^2-6)}{120x^5}+C$

314. $\frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{27x^3}+C$ **315.** $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C$

316. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+C$ **317.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C$

318. $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$

319. $\sqrt{x^2+2x}\,\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$

320. $\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}+C$ (Es conveniente la sustitución $x=\operatorname{sen}u$)

321. $\frac{2}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax}{b}}+C$

322. $C\frac{(1+x^8)^{\frac{3}{2}}}{12x^{12}}$

323. $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}+C$

324. $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}-\ln(x^2+\sqrt{x^4+4})+C$

325. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$

326. $C-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}-\frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\sqrt{x^3}$

327. $C-\frac{x^3}{4(1+x^2)^2}-\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3\operatorname{arctg}x}{8}$

328. $\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C$

329. $\operatorname{arcsen}e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

330. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$

331. $C-\frac{1}{2}\ln^2(1+\frac{1}{x})$ (sustituyendo $u=1+\frac{1}{x}$)

332. $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$

333. $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$

334. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

335. $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5x}(5\operatorname{tg}^2x+11)+C$

336. $\frac{\sqrt{2}}{5}(\operatorname{tg}^2x+5)\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$

3. TIPOS PRINCIPALES DE LAS FUNCIONES INTEGRALES

Funciones fraccionarias racionales:

337. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$

338. $\frac{1}{5}\ln[(x-2)^2\sqrt{2x+1}]+C$

339. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x-3)^7}\right|+C$

340. $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C$

341. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$

342. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$

343. $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C$

344. $\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$

345. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$

346. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C$

347. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C$

348. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$

349. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$

350. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$

351. $C-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln|x-2|$

352. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

353. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C$

354. $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C$

355. $\frac{x}{8}-\ln|x+1|-\frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}+C$

356. $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C$

357. $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C$

358. $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C$

359 $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C$

360. $C-\frac{x}{(x^2-1)^2}$

361. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$

362. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

363. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

364. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$

365. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C$

366. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$

367. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$

368. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$

369. $\frac{1}{4}[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\operatorname{arctg}x-\frac{7}{(x-1)^2}]+C$

370. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$

371. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C$

372. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\text{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$ (En el denominador de la expresión integrando sumar y restar $2x^2$)

373. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4+\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

374. $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C$

375. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\text{arctg}\frac{x-3}{2}+C$

376. $\frac{3}{8}\text{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C$

377. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\text{arctg}\frac{x}{3}+C$

378. $\frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C$

379. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\text{arctg}\,x+C$

380. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C$

381. $\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-2\ln(x^2+x+1)+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+C$

382. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\text{arctg}\,x+C$

383. $C-6\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}$

384. $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C$

385. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x-2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\text{arctg}\,x+C$

386. $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3(x^3+1)}+C$

387. $\frac{1}{648}\left[\text{arctg}\frac{x+1}{3}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right]+C$

388. $\frac{3}{8}\text{arctg}(x+1)+\frac{3}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+C$

389. $C-\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{16}\text{arctg}\frac{x}{2}-\text{arctg}(x+2)$

390. $C-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\text{arctg}\,x$

391. $\frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)}+\ln\frac{|x-1|}{(x+1)^2}+C$

392. $\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{5}\right)\frac{1}{x(3-2x^2)^2}+\frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right|+C$

Algunas funciones irracionales:

393. $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$

394. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+$

$\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C$

395. $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]+C$

396. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$

397. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+C$

398. $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C$

399. $\ln\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt{x}\operatorname{arctg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$

400. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$. Multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt[4]{x-1}$, y sacar los multiplicadores fuera del signo de radical.

401. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$

402. $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C$

403. $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\frac{1}{4}\ln[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1]+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\times\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$

404. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$

405. $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

406. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$

407. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C$

408. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$

409. $6u+2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

410. $\frac{1}{5}\ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{1+2u}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\sqrt[3]{1+x^5}$

411. $C-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|$

412. $C-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$

413. $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{6}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$

414. $12\left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13}-\frac{3\sqrt[3]{u^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{u^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{u^4}}{4}\right]+C$, donde $u=1+\sqrt[4]{x}$

Funciones trigonométricas:

415. $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)+C$

416. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$

417. $\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$

418. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x-\frac{3}{2}x+C$

419. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$

420. $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$

421. $\frac{1}{\cos x-1}+C$

422. $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+C$

423. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen} 2x\left(\cos^4 x+\frac{5}{4}\cos^2 x+\frac{15}{8}\right)+C$

424. $x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C$

425. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 x-\ln|\cos x|+C$

426. $x-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C$

427. $C-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$

428. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x+C$

429. $C-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$

430. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$

431. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|tg\frac{x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}{2}\right|+C$

432. $\ln\frac{|C\cdot\operatorname{sen} x|}{\sqrt{\cos 2x}}$

433. $\ln\frac{|C\cdot\operatorname{sen} x|}{\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2 x}}$

434. $\frac{1}{2}[x+\ln|\operatorname{sen}x+\cos x|]+C$

435. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$

436. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$

437. $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$

438. $\frac{\cos x(\cos x-\operatorname{sen}x)}{4}-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\operatorname{sen}x|+C$

439. $\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|tg\,x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg}x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+C$

440. $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\operatorname{sen}2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\operatorname{arcsen}\frac{4\operatorname{sen}2x+1}{4+\operatorname{sen}2x}+C$

441. $\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C$

442. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+C$

443. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C$

444. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}tg\,x)+C$

445. $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}x}{b}+C$

446. $C-\frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\right]$

447. $\ln\frac{\left|\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1\right|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}+C$

448. $2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ para los valores de x que satisfacen la desigualdad $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geq 0$, y $-2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ para los valores de x que satisfacen la desigualdad $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\leq 0$

449. $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$

450. $C-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5x}$ (Poner $u=\operatorname{ctg}x$)

451. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}+C$

452. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2x})+C$

453. $2\operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}x}+C$

454. $C-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x(2+\operatorname{tg}^2x)\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2x}$

455. $\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\ln\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C$

456. $\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\operatorname{sen}x+\cos x-\sqrt{\operatorname{sen}2x})+\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x-\cos x)]+C$

Funciones hiperbólicas:

457. $\operatorname{sh}x+C$

458. $\operatorname{ch}x+C$

459. $\operatorname{th}x+C$

460. $x+C$

461. $\frac{1}{2a}\operatorname{sh}2ax+C$

462. $\frac{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x-x}{2}+C$

463. $x - \text{th}\,x + C$ **464.** $x - \text{cth}\,x + C$ **465.** $\frac{1}{3}\text{ch}^3 x - \text{ch}\,x + C$

466. $\text{sh}\,x + \frac{1}{3}\text{sh}^3 x + C$ **467.** $x - \text{th}\,x - \frac{1}{3}\text{th}^3 x + C$

468. $\frac{1}{3}\text{sh}^3 x + \frac{1}{5}\text{sh}^5 x + C$ **469.** $\ln|\text{sh}\,x| - \frac{1}{2}\text{cth}^2 x - \frac{1}{4}\text{cth}^4 x + C$

470. $\ln|\text{th}\,x| + C$ **471.** $\ln\left|th\frac{x}{2}\right| + C$ **472.** $\frac{1}{2}\text{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\text{th}^3\frac{x}{2} + C$

473. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\text{th}\,x}}{|1-\sqrt{\text{th}\,x}|} - \text{arctg}\sqrt{\text{th}\,x + C}$ **474.** $x\,\text{th}\,x - \ln\text{ch}\,x + C$

475. $C - \frac{e^{3x}}{3\text{sh}^3 x}$

Funciones racionales de: x y $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

476. $\ln\frac{|cx|}{2 + x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}$ **477.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}} + C$ **478.** $\text{arcsen}\frac{x-1}{x\sqrt{2}} + C$

479. $C - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$

480. $\ln|x + 1 + \sqrt{2x + x^2}| - \frac{4}{x + \sqrt{2x + x^2}} + C$

481. $C - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3 + 3x + 2\sqrt{3(x^2 + x + 1)}}{x - 1}\right|$

482. $C - \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x + 6 + \sqrt{60x - 15x^2}}{2x - 3}\right|$

483. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \ln|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 1}| + C$

484. $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2 - 3x + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right| + C$

485. $\frac{1}{2}\left[(x+2)\sqrt{1 - 4x - x^2} + 5\,\text{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right] + C$

486. $C - \frac{3}{2(2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{3}{2}\ln|2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} + |2\ln|x - \sqrt{x^2 - x + 1}|$

487. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

488. $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$

489. $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\text{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

490. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$

491. $C-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+14\,\text{arcsen}\frac{x+1}{2}$

492. $(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln(x+2\sqrt{x^2+4x+5})+C$

493. $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x+2x+2})+C$

494. $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}|+C$

495. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+7}+\frac{35}{8}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C$

496. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1}+C$

497. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$

498. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C$

499. $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4-1}}{\sqrt{x^2+2x+4+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+C$

__Diversas funciones:__

500. $C-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}$

501. $\frac{1}{3}[x^2+\sqrt{(x^2-1)^3}]+C$

502. $\frac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28}+C$

503. $\frac{1}{m\sqrt{ab}}\text{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C$

504. $\frac{1}{2}\text{arcsen}\,x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+C$

505. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|(x+2)^{32}}{|x+1|^3}+C$

506. $\frac{11}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$

507. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

508. $2\sqrt{x+1}\,[\ln|x+2|-2]+C$

509. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\operatorname{sen}2x+C$

510. $x^2\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x+C$

511. $x\operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln|x+2\sqrt{x}+2|+C$

512. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\operatorname{arcsen}x}{x}+C$

513. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^5}-2\sqrt[2]{x}+2)+C$

514. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120)+C$

515. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}\right)+C$

516. $2(\operatorname{sen}\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C$

517. $\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C$

518. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$

519. $\ln(x+\sqrt{1+x})^2-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

520. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x\right)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$

521. $3[\ln|u|-\ln(1+\sqrt{1-u^2})-\operatorname{arcsen}u]+C$, donde $u=\sqrt[3]{x}$

522. $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$

523. $C-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$

524. $\frac{1}{15}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right]+C$, donde $z=x^5$

525. $C-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$

526. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C$

527. $\frac{2}{b^2\operatorname{sen}2\alpha}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}(\alpha-x)}{\operatorname{sen}(\alpha+x)}\right|+C$, donde $\alpha=\arccos\frac{a}{b}$, si $a^2<b^2$;

$\frac{1}{a^2\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}\alpha}+C$, donde $\alpha=\arccos\frac{b}{a}$, si $a^2>b^2$

528. $\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^3)-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

529. $\frac{x}{\ln x}+C$

530. $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+C$

531. $\frac{1}{2}e^{x}[(x^{2}-1)\cos x+(x-1)^{2}\operatorname{sen}x]+C$ **532.** $\frac{x^{2}e^{x^{2}}}{2}+C$

533. $\frac{2}{3}\frac{\operatorname{tg}^{2}x-3}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}+C$ **534.** $\frac{1}{4}(\operatorname{tg}^{4}x-\operatorname{ctg}^{4}x)+2(\operatorname{tg}^{2}x-\operatorname{ctg}^{2}x)+6\ln|\operatorname{tg}x|+C$

535. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^{2}x)+C$ **536.** $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$

537. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^{2}x}}+\ln(\sqrt{2+\operatorname{tg}^{2}x}+\operatorname{tg}x+C$

538. $\ln\frac{x^{2}+1+\sqrt{x^{4}+3x^{2}+1}}{x}+C$ **539.** $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^{2}}}{2x-3}\right|$

540. $\frac{e^{x}}{1+x}+C$ **541.** $2x\sqrt{1+e^{x}}-4\sqrt{1+e^{x}}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}+C$

542. $\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^{2}}{x^{2}}-\frac{\operatorname{arctg}x}{3x^{3}}-\frac{1}{6x^{2}}+C$ **543.** $C-\frac{\operatorname{arctg}x}{2(1+x^{2})}+\frac{\operatorname{arctg}x}{4}+\frac{x}{4(1+x^{2})}$

544. $\frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^{2}+1}}-\frac{\operatorname{arctg}x}{2(1+x)^{2}}-\frac{1}{4(x+1)}+C$

545. $x-\log_{2}|1-2^{x}|+\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{1-2^{x}}+\frac{1}{2(1-2^{x})^{2}}+\frac{1}{3(1-2^{x})^{3}}\right]+C$

546. $\operatorname{arctg}(e^{x}-e^{-x})+C$ **547.** $\ln\frac{1+e^{x}-\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}}{1-e^{x}+\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}}+C$

548. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$

549. $\frac{35}{128}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{7}{128}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{24}\operatorname{sen}^{3}2x+\frac{1}{1024}\operatorname{sen}8x+C$

550. $\frac{1}{2}x^{2}+\frac{3}{2}\ln(1+x^{2})+\frac{1}{(1+x^{2})^{2}}+C$ **551.** $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{48(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C$

552. $C-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg}2x)$ **553.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$

554. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^{2}+1}+C$ (Dividir el numerador y el denominador por x^{2} y realizar la sustitución $x+\frac{1}{x}=z$).

555. $e^{\operatorname{sen}x}(x-\sec x)+C$

Métodos para calcular integrales definidas Integrales Impropias

1. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN EXACTA

Aplicación directa de la fórmula de Newton-Leibniz:

556. $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$
557. $\frac{7}{12}$
558. $-5(\sqrt[5]{16}-1)$
559. $7\frac{2}{3}$
560. $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$
561. 12
562. $0,2(e-1)^5$
563. $3\ln\frac{b}{b-a}$
564. $\frac{1}{4}$
565. $\frac{\pi}{2}$
566. $1+\frac{1}{2}\lg e$
567. $e-\sqrt{e}$
568. $\frac{\pi}{6n}$
569. 2
570. $\frac{4}{3}$
571. $\ln\frac{3}{2}$
572. $0,2\ln\frac{4}{3}$
573. $\operatorname{arctg} x\frac{1}{7}$
574. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$
575. $\frac{\pi}{6}$
576. 2
577. $\frac{2}{7}$
578. $\frac{4}{3}$
579. $\frac{\pi}{2\omega}$
580. $-0,083...$
581. $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{3}-\operatorname{ctg}\alpha$
582. 1
583. $-\sqrt{2/3}$
584. $1-2/e$
585. $\pi/2-1$
586. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$
587. $\pi^3-6\pi$
588. $2-\frac{3}{4\ln 2}$
589. 1
590. $\frac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$
591. $\frac{\pi a^2}{4}$
592. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$
593. $6-2e$
594. a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\approx 0,429$; c) $\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}{11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3}=\frac{256}{693}$
595. $J_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}J_{m,n-2}=\frac{m-1}{m+n}J_{m-2,n}$

Si n es impar, se tiene: $J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)...4\cdot2}{(m+n)(M+n-2)...(m+3)(m+1)}$;

si m es impar, se tiene: $J_{m,n}=\frac{(m-1)(m-3)...4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)...(n+3)(n+1)}$;

si m es par y n es par, se tiene: $J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)....3\cdot1\cdot(m-1)(m-3)...3\cdot1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)....4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$

596. $(-1)^n n!\left[1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+....+\frac{1}{1!}+1\right)\right]$ **597.** $\frac{11}{48}+\frac{5\pi}{64}$

598.

599. $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Poner $x=\operatorname{sen}^2 z$ y aplicar el resultado del ejercicio ......

Cambio de variable en la integral definida:

600. $7+2\ln 2$

601. $2-\frac{\pi}{2}$ **602.** $\frac{32}{3}$ **603.** $\frac{5}{3}-2\ln 2$

604. $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$ **605.** $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

606. $\frac{5}{16}\pi$. Poniendo $x=2z$ transformamos la integral dada en $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^6 z\,dx$

607. $\frac{8}{35}$. Poner $x=\frac{z}{2}$ **608.** $\frac{\pi}{23}$

609. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$ **610.** $\frac{8}{15}$

611. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ **612.** $\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)$ **613.** $\frac{3}{16}\pi$

614. $\frac{\pi}{16}$ **615.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$ **616.** $\frac{\pi}{4}$

617. $\frac{\sqrt{3}}{24}$ **618.** $\frac{\pi}{3}$ **619.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

620. $\frac{\sqrt{6}}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{48}$

Distintos problemas:

621. $\frac{20}{9}$ **622.** $2\ln\frac{6}{5}\approx 0,365$ **623.** $\frac{2}{\pi};\frac{1}{2}$

624. $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$ **625.** Para $a=e$ **626.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$

627. $\frac{2}{45}$ **628.** $8\ln 3-15\ln 2+\frac{13}{8}$ **629.** $\frac{5}{192}(5+7\sqrt[5]{5^3})$

630. $\frac{\pi}{6}$ **631.** $a^2[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$ **632.** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$

633. $\frac{848}{105}$ **634.** $4-\pi$ **635.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$

636. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ **637.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$ **638.** $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$

639. $\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$ **640.** $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$ **641.** $\frac{19}{27}-\frac{5}{6\sqrt{6}}$

642. $\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$ **643.**

644. $x=2$ **645.** $x=\ln 4$ **646.**

647. Utilizar las relaciones $4-x^2 \geq 4-x^2-x^3 \geq 4-2x^2$, que son validas para $0 \leq x \leq 1$

648. Utilizar las desigualdades $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-x^{2n}} \leq 1$, donde $-1 \leq x \leq 1$ y $n \geq 1$

649. $1{,}098 < I < 1{,}110$

650. Para evaluar la integral por abajo, utilizar la desigualdad $1+x^4 < (1+x^2)^2$, y para evaluar por arriba, emplear la desigualdad de Cauchy - Buniakovski.

651. $I(1) \approx 1{,}66$ es el valor máximo, $I\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0{,}11$ es el valor mínimo.

652. El mínimo existe para $x=1(y=-17/12)$, los puntos de inflexión son $(2,-4/3)$ y $(4/3,-112/81)$.

653. **654.** **655.** **656.**

657. a) Sustituir la variable de la integración de acuerdo con la formula $t=-x$, dividir el intervalo $[a,-x]$ teniendo en cuenta que la integral de una función impar sobre el intervalo $[-a,a]$ es igual a cero.

b) No, si $a \neq 0$; si, si $a=0$

658. Poner $t=1/z$

659. **660.** **661.** **662.**

663. Cada una de las integrales es igual a $\pi/4$

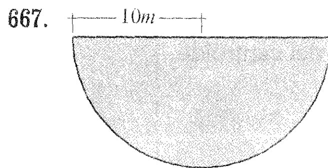
664. Poner $x=\pi-z$. La integral es igual a $\pi^2/4$ **665.**

EJERCICIOS DIVERSOS 1:

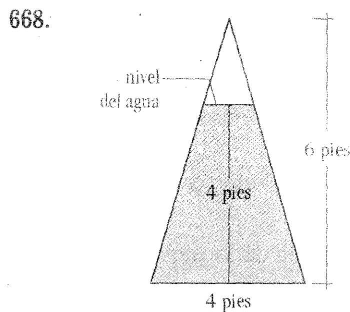
666. Un acuario tiene 5 pies de longitud, 2 de ancho y 3 de profundidad y está lleno de agua. Calcule (a) la presión hidrostática sobre el fondo del acuario; (b) la fuerza hidrostática sobre el fondo; (c) la fuerza hidrostática sobre un extremo.

Los tanques de almacenamiento que están a la derecha tienen extremos verticales con la forma exhibidas en las figuras y están llenos de agua. Explique cómo se aproxima la fuerza hidrostática sobre un extremo del tanque con una suma de Riemann. Luego exprese la fuerza como una integral de Riemann y evalúela.

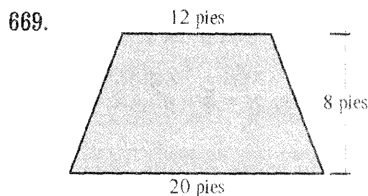
667.



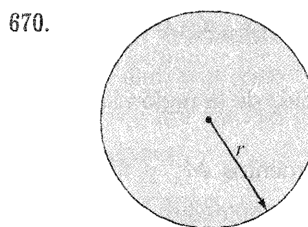
668.



669.



670.



671. Un canalón se llena con un liquido cuya densidad es $840kg/m^3$. Los extremos del canalón son triángulos equiláteros de 8m de lado y vértice hacia abajo. Calcule la fuerza hidrostática sobre uno de los extremos del canalón.

672. Un cubo de 20cm de lado está en el fondo de un acuario en que hay 1m de agua. Calcules la fuerza hidrostática sobre (a) la cara superior del cubo y (b) uno de los lados verticales.

673. Una alberca mide 20 pies de ancho por 40 de largo y su fondo es un plano inclinado; el extremo bajo tiene 3 pies de profundidad, y el hondo, 9 pies. Calcule la fuerza hidrostática sobre (a) el extremo bajo; (b) el extremo hondo; (c) uno de los lados, y (d) el fondo de la alberca.

674. Emplee la fórmula $F = \int_a^b \rho g x w(x) dx$ para demostrar que: $F = (\rho g \overline{x})A$, donde $\overline{x}$ es la abscisa del centroide de la placa y A es su área. La ecuación indica que la fuerza hidrostática contra una región vertical plana es igual a la que se presentaría si la región estuviera horizontal y a la profundidad de su centroide.

675. Se colocan las masas m_i en los puntos P_i. Halle los momentos M_x y M_y y el centro de masa del sistema: $m_1 = 4$; $m_2 = 8$; $P_1(-1,2)$; $P_2(2,4)$

♦ Dibuje la región limitada por las curvas y estime visualmente la posición del centroide. Luego, encuentre las coordenadas exactas del centroide.

676. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$

677. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

♦ Halle el centroide de la región limitada por las curvas:

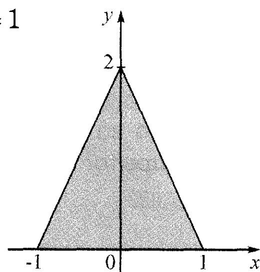
678. $y = \text{sen}2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi / 2$

679. $y = \text{sen}x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi / 4$

680. Halle el centroide de la región limitada por las curvas: $x = 5 - y^2$, $x = 0$

♦ Calcule los momentos M_x y M_y, y el centroide de masa de una lámina con la densidad y forma indicadas.

681. $\rho = 1$

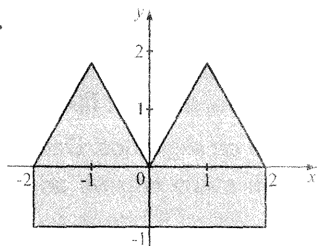


682. Halle el centroide de la región limitada por las curvas $y = 2^x$ y $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, hasta el tercer decimal. Dibuje la región y marque el centroide para ver si su respuesta es razonable.

683. Demuestre que el centroide de cualquier triángulo está en el punto de intersección de sus medianas. [**SUGERENCIAS:** coloque los ejes de modo que los vértices estén en $(a,0)$, $(0,b)$, y $(c,0)$. Recuerde que una mediana es el segmento de la recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto. También, recuerde que las medianas se intersecan en un punto que está a dos tercios de la longitud de la mediana, partiendo de los vértices).

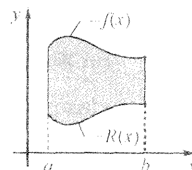
◆ Halle el lugar del centroide de la región que muestra cada figura, no por integración, sino localizando los centroides de los rectángulos y los triángulos (de acuerdo con el resultado del Ejer. 683) y aplicando la aditividad de los momentos.

684.



685. Un cono de altura h y radio de la base r.

686. Demuestre las ecuaciones:



$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

687. La función de costo marginal $C'(x)$ se definió como la derivada de la función de costo. Si el costo marginal para fabricar x unidades de un producto es $C'(x) = 0.006x^2 - 15x + 8$ (en dólares por unidad) y el costo fijo de arranque es $C(0) = \$1,500,000$, dólares, aplique el teorema del cambio total para hallar el costo de producción de las primeras 2000 unidades.

688. El costo marginal de producción de x unidades de cierto producto es $74 + 1.1x - 0.002x^2 + 0.00004x^3$ (en dólares por unidad). Encuentre el aumento de costo si el nivel de producción se eleva de 1200 unidades a 1600.

689. Se da una curva de demanda por $p = 450/(x+8)$. Halle el superávit del consumidor cuando el precio de venta es de 10 dólares.

690. Una curva de oferta está representada por $p = 5 + \frac{1}{10}\sqrt{x}$. Calcule el excedente de productor cuando el precio de venta es \$10.

691. Una compañía modela la curva de demanda para un producto con $p = \dfrac{800{,}000e^{-x/5000}}{x + 20{,}000}$ use una gráfica para estimar el nivel de ventas cuando el precio

de venta es $16. Luego, encuentre aproximadamente el excedente de los consumidores para este nivel de ventas.

692. Si el capital que tiene una empresa en el momento t es $f(t)$, entonces la derivada, $f'(t)$, se llama *flujo neto de inversión*. Si el flujo neto de inversión es de $\sqrt{t}$ millones de dólares anuales (t representa números de años), calcule el aumento de capital (la *formación de capital*) desde el cuarto hasta el octavo año.

693. Aplique la ley de Poiseuille para calcular el flujo en una arteria humana normal, en donde podemos suponer que $\eta = 0.027$, $R = 0.008cm$, $l = 2\text{cm}$, y $P = 4000\text{dinas}/\text{cm}^2$.

694. Se emplea el método de dilución de colorante al fin de medir el trabajo cardiaco, con 8mg de colorante. Las concentraciones del mismo, en mg/l, están expresadas por $c(t) = \frac{1}{4}t(12-t)$, $0 \le t \le 12$, donde t se da en segundos. Determine el trabajo cardiaco.

Respuestas:

666. (a) $187.5\ \text{lb/ft}^2$ (b) $1875\ \text{lb}$ (c) $562.5\ \text{lb}$

667. $6.5\times10^6 N$ **688.** $1.56\times10^3\ \text{lb}$ **689.** $3.47\times10^4\ \text{lb}$

670. $1000g\pi r^3 N$ **671.** $5.27\times10^5 N$

672. (a) $314N$ (b) $353N$

673. (a) $5.63\times10^3\ \text{lb}$ (b) $5.06\times10^4\ \text{lb}$ (c) $4.88\times10^4\ \text{lb}$ (d) $3.03\times10^5\ \text{lb}$

674.

675. 40, 12, $\left(1,\frac{10}{3}\right)$ **676.** (1.5, 1.2) **677.** $\left(1/(e-1), (e+1)/4\right)$

678. $(\pi/4, \pi/8)$ **679.** $((\pi\sqrt{2}-4)/[4(\sqrt{2}-1)], 1/[4(\sqrt{2}-1)])$

680. (2, 0) **681.** $\frac{4}{3}, 0, \left(0,\frac{2}{3}\right)$ **682.** (0.781, 1.330)

683. **684.** $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ **685.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

686.

687. $14,516,000 **688.** $43,866,933.33 **689.** $407.25

690. $4166.67 **691.** 3727 ; $37,753

692. $16(2\sqrt{2}-1)/3 \approx \$9.75$ millones **693.** $1.19\times10^{-4}\ \text{cm}^3/\text{s}$

694. $\frac{1}{9}\text{L/s}$

EJERCICIOS DIVERSOS 2:

695. La función de costo marginal $C'(x)$ se definió como la derivada de la función de costo. Si el costo marginal para fabricar x unidades de un producto es:

$C'(x) = 0.006x^2 - 1.5x + 8$ (en dólares por unidad) y el costo fijo de arranque es $C(0) = \$1,500,000$, dólares, aplique el teorema del cambo total para hallar el costo de producción de las primeras 2000 unidades.

696. El costo marginal de producción de x unidades de cierto producto es $74 + 1.1x - 0.002x^2 + 0.00004x^3$ (en dólares por unidad). Encuentre el aumento de costo si el nivel de producción se eleva de 1200 unidades a 1600.

697. Se da una curva de demanda por $p = 450/(x+8)$. Halle el superávit del consumidor cuando el precio de venta es de 10 dólares.

698. Una curva de oferta está representada por $p = 5 + \frac{1}{10}\sqrt{x}$. Calcule el excedente de productor cuando el precio de venta es \$10.

699. Una compañía modela la curva de demanda para un producto con

$$p = \frac{800,000e^{x/5000}}{x + 20,000}$$

use una gráfica para estimar el nivel de ventas cuando el precio de venta es \$16. Luego, encuentre aproximadamente el excedente de los consumidores para este nivel de ventas.

700. Si el capital que tiene una empresa en el momento t es $f(t)$, entonces la derivada, $f'(t)$, se llama *flujo neto de inversión*. Si el flujo neto de inversión es de $\sqrt{t}$ millones de dólares anuales (t representa número de años), calcule el aumento de capital (la *función de capital*) desde el cuarto hasta el octavo año.

701. Aplique la ley de Poiseuille para calcular el flujo en una arteria humana normal, en donde podemos suponer que $\eta = 0.027$, $R = 0.008\,cm$, $l = 2\,cm$, y $P = 4000$ dinas/cm^2.

702. Se emplea el método de dilución de colorante a fin de medir el trabajo cardiaco, con 8 mg de colorante. Las concentraciones del mismo, en mg/l, están expresadas por $c(t) = \frac{1}{4}t(12-t)$, $0 \le t \le 12$, donde t se da en segundos. Determine el trabajo cardiaco.

<u>Respuestas</u>:

695. $14,516,000

696. $43,866,933.33

697. $407.25

698. $4166.67

699. 3727 ; $37,753

700. $16(2\sqrt{2}-1)/3 \approx$ $9,75 millones

701. 1.19×10^{-4} cm^3/s

702. $\frac{1}{9}$ L/s

CAPÍTULO 2

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. ÁREA DE LAS REGIONES PLANAS EN COORDENADAS: CARTESIANAS, PARAMÉTRICAS Y POLARES

1.1 ÁREA EN COORDENADAS CARTESIANAS

Para hallar el área de una región R es necesario conocer las funciones que la acotan y los límites de integración.

Las integrales a calcularse pueden ser con respecto a "x" o con respecto a "y", este criterio dependerá de la forma que tenga la región.

Podemos resumir 4 casos:

1 La región R es:

$R=\{(x,y)/0\le y\le f(x)\,,\,a\le x\le b\}$

$$dA=y\cdot dx \Rightarrow A=\int_a^b y\cdot dx\ ,\ y=f(x)$$

La función $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y $f(x)\ge 0$, $\forall\ x\in[a,b]$.

2 La región R es:

$R=\{(x,y)/0\le x\le f(x)\,,\,c\le y\le d\}$

$$dA=x\cdot dy$$

$$\boxed{A=\int_c^d x\cdot dy}\ ,\ x=f(y)$$

3 La regla R es:

$R=\{(x,y)/g(x)\le f(x)\,,\,a\le x\le b\}$

$$dA=[f(x)-g(x)]\,dx$$

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

4 La región R es:

$R=\{(x,y)/g(y)\le f(y)\,,\,c\le y\le d\}$

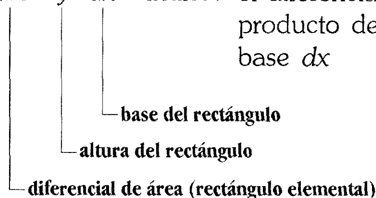
$$dA=[f(y)-g(y)]\,dy$$

$$A=\int_c^f [f(y)-g(y)]\,dy$$

En el cuadro tener en cuenta las siguientes notaciones:

En el **Caso I:**

La notación $dA=y\cdot dx$ indica: el diferencial del área del rectángulo es igual al producto de su altura "y" multiplicado por su base dx



donde:

$y=f(x)$ es una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y es continua en $[a,b]$
Geométricamente $y=f(x)$ es una curva o recta con dominio $[a,b]$.

Si integramos la ecuación diferencial $dA = y \cdot dx$ desde "a" hasta "b".

$$\text{obtenemos:} \quad \int dA = \int_a^b y \cdot dx$$

$$A = \int_a^b y \cdot dx$$

dA : es el diferencial de área.

dx : es el diferencial de x.

Ejemplo 1. Calcular el área de la región R limitado por las gráficas de:

$$y = \frac{4|x|}{1+x^2} \quad , \quad 5|x| - 5y - 9 = 0$$

Solución:

Paso 1 Graficar la región R.

$$\begin{cases} \dfrac{4x}{1+x^2} & , \quad x \geq 0 \\ \dfrac{-4x}{1+x^2} & , \quad x < 0 \end{cases} \qquad 5|x| - 5y + 9 = 0 \iff \begin{cases} 5x - 5y - 9 = 0 \ , \ x \geq 0 \\ -5x - 5y - 9 = 0 \ , \ x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto que aparece en cada función subdivide la función.

Debemos graficar cada función:

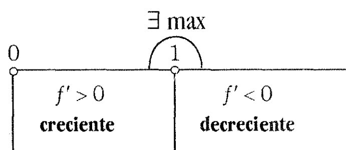
a) Gráfico de $f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \quad , \quad x \geq 0$

Derivar, para averiguar si tiene máximos o mínimos:

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(4) - 4x(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4(x^2-1)}{(1+x^2)^2} \quad \begin{cases} f' = 0 \Rightarrow x \pm 1 \wedge x \geq 0 \iff x = 1 \\ f' > 0 \Rightarrow [-1 < x < 1 \wedge x \geq 0] \iff 0 \leq x < 1 \\ f' < 0 \Rightarrow [(x < -1 \vee x > 1) \wedge x \geq 0] \iff x > 1 \end{cases}$$

Visto en un diagrama:



$$\text{máx}\ (f) = f(1) = 2$$

$$\text{mín}\ (f) = f(0) = 0$$

b) Gráfico de $g(x) = \frac{-4x}{1+x^2}$, $x < 0$ se opera de manera similar, obteniéndose:

$$\text{máx}\ (f) = f(-1) = 2$$

$$\text{mín}\ (f) = f(0) = 0$$

c) Gráfico de:
$5x - 5y - 9 = 0$, $x \geq 0$

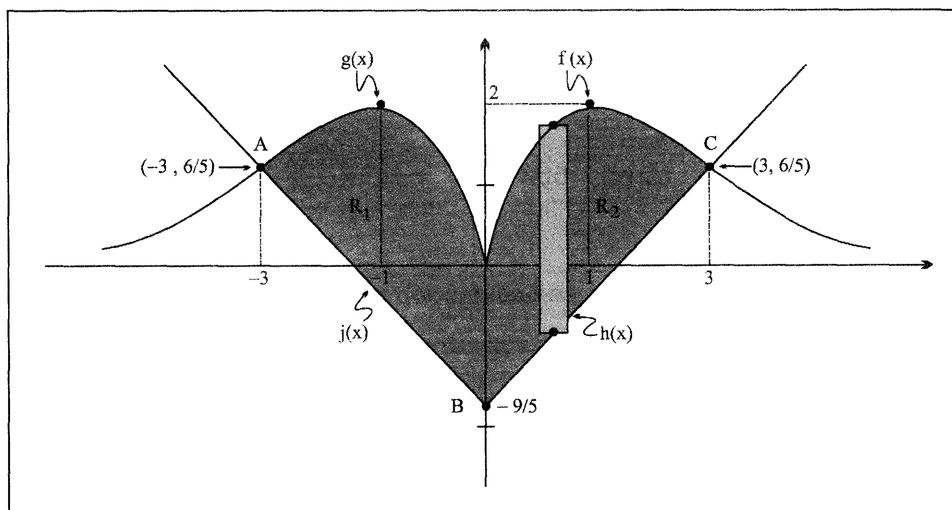
x	0	1
y	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{4}{5}$

$h(x) = y = x - \frac{9}{5}$

d) Gráfico de:
$-5x - 5y - 9 = 0$, $x \leq 0$

x	0	1
y	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{4}{5}$

$J(x) = y = -x - \frac{9}{5}$



Nota:
El gráfico de la región R nos permite 4 cosas básicas:

a) Nos permite ver la disposición de las funciones que son fronteras de la región. En este problema tenemos:

Fronteras superiores $\begin{cases} g(x) = y = \dfrac{-4x}{1+x^2} \\ f(x) = y = \dfrac{4x}{1+x^2} \end{cases}$

Fronteras inferiores $\begin{cases} J(x) = y = x - \frac{9}{5} \\ h(x) = y = -x - \frac{9}{5} \end{cases}$

b) nos permite intuir cómo se podrá **INTEGRAR**. Si la región se barre verticalmente se integra respecto a x; pero si se barre horizontalmente, se integra respecto a y. La elección de una u otra forma dependerá de la disposición de las funciones frontera.

   En este problema se integra con respecto a x, porque es más sencillo "barrer" verticalmente.

c) nos permite intuir los límites de integración. En este problema los límites de integración son: $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$.

d) nos permite visualizar si la región es simétrica con respecto al eje "y" o con respecto al eje "x". Cuando la región es simétrica con respecto a uno de los ejes coordenados, bastará hallar el área de la mitad de la región para luego ser duplicado.

En este problema, la región R es simétrica con respecto al eje Y.

Paso 2 Hallar los límites de integración.

Los límites de integración se hallan resolviendo sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En este problema se debe resolver los sistemas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{-4x}{1+x^2} \\ y = -x - \frac{9}{5} \end{cases}$$

Las soluciones son:

$A = \left(-3, \frac{6}{5}\right)$

$B = \left(0, -\frac{9}{5}\right)$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x}{1+x^2} \\ y = x - \frac{9}{5} \end{cases}$$

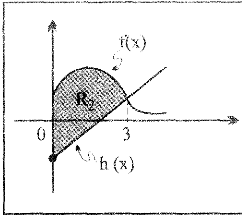
Las soluciones son:

$A = \left(0, -\frac{9}{5}\right)$

$B = \left(3, \frac{6}{5}\right)$

Paso 3 Cálculo del área por integrales definidas.

Porque la región es simétrica con respecto al eje Y, bastará calcular el área de la mitad de la región.



Como $R = R_1 \cup R_2$ y $R_1 = R_2$, entonces:

Área de $R = 2$ (área R_2) $\longleftarrow$ dos veces el área de R_2.

El área de R_2 es:

$$A(R_2) = \int_0^3 [f(x) - h(x)]dx$$

Calculemos la integral:

$$I = \int_0^3 [f(x) - h(x)]\,dx$$

$$I = \int_0^3 \left[\frac{4x}{1+x^2} - \left(x - \frac{9}{5}\right)\right] dx$$

$$I = 4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{9}{5}x \Big]_0^3$$

$$I = \left[2 \operatorname{Ln} 10 - \frac{9}{2} + \frac{9}{5}(3)\right] - \left[2 \operatorname{Ln} 1 - 0 + 0\right] = 2 \operatorname{Ln} 10 + \frac{9}{10}$$

Luego: $A(R) = 2\left[2 \operatorname{Ln} 10 + \frac{9}{10}\right] = \left(4 \operatorname{Ln} 10 + \frac{9}{5}\right)u^2$

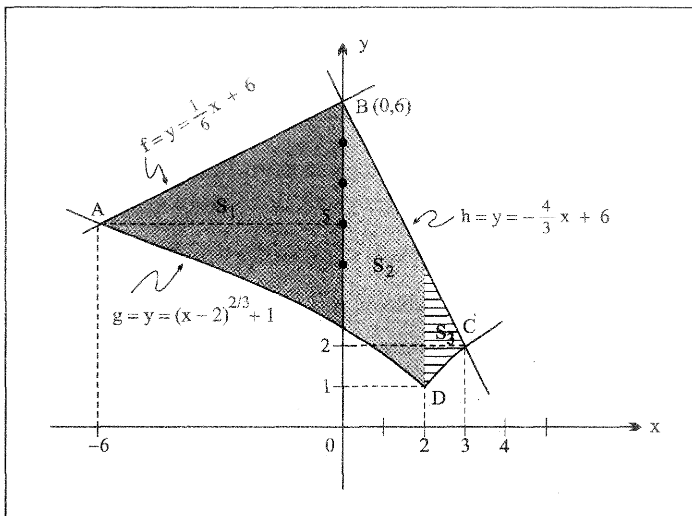
Ejemplo 2. Hallar el área de la región S limitada por las gráficas:

$$S: \begin{cases} y = (x-2)^{2/3} + 1 \\ x - 6y + 36 = 0 \\ 4x + 3y - 18 = 0 \end{cases}$$

Solución:

1. Graficar la región S.
2. Hallar los límites de integración.

Gráfico:



Resolver los sistemas: $\begin{cases} y = (x-2)^{2/3} + 1 \\ x - 6y + 36 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad A = (-6,5)$

$$\begin{cases} x - 6y + 36 = 0 \\ 4x + 3y - 18 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad B = (0,6)$$

$$\begin{cases} y = (x-2)^{2/3} + 1 \\ 4x + 3y - 18 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad C = (3,2)$$

3. ¿Cómo integramos?, ¿con respecto a x o con respecto a y?. Eso dependerá de la disposición de las funciones - frontera.

   En este problema, la disposición de las funciones - frontera están dadas para <u>integrar con respecto a x</u>.

Nota:
Antes de integrar conviene dar una mirada a la región S para tomar decisiones sobre tres aspectos muy importantes:

a) ¿De dónde a dónde se va a integrar para hallar el área de la región S?
b) ¿El área de la región S se calculará con una sola integral o con varias integrales?
c) Al ubicarse en un punto interior de la región S, ¿qué funciones frontera están hacia arriba y hacia abajo?

Estas tres preguntas usted debe plantearse para hallar el área de una región cuyas fronteras son ecuaciones cartesianas en dos variables (x, y).

Respondamos las tres preguntas para el presente problema:

a) Se integrará desde $x = -6$ hasta $x = 3$.

b) El área de S, no se podrá calcular con una sola integral. ¿Por qué?

Para responder está pregunta sugiero al lector hacer mentalmente lo siguiente :

Tome una **RECTA VERTICAL** y recorra verticalmente desde $x = 6$ (que es el principio de la región S) barriendo la región hasta $x = 3$ (que es el final de la región S).

A medida que va recorriendo verticalmente, va mirando la función frontera de arriba y de abajo. Si usted encuentra en este recorrido una "esquina" o un cambio de función, entonces trace una vertical, la cual definirá una nueva subregión.

Del número de subregiones, dependerá las veces que se van a integrar.

En el presente problema hay tres subregiones: S_1, S_2 y S_3.
La región S_1 es barrida desde el vértice A hasta el vértice B.
La región S_2 es barrida desde el vértice B hasta el vértice D.
La región S_3 es barrida desde el vértice D hasta el vértice C.

Como: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ y $S_i \cap S_j = \phi$, $\forall\, i \neq j$ $\vee$ $S_i \cap S_j =$ recta vertical $\forall\, i \neq j$

$$\Rightarrow \underbrace{A(S)}_{\text{área de S.}} = A(S_1) + A(S_2) + A(S_3)$$

Donde:

i) $$A(S_1) = \int_{-6}^{0} (f - g)dx$$

$$= \int_{-6}^{0} \left[\tfrac{1}{6}x + 6 - (x-2)^{2/3} - 1 \right] dx$$

$$= \int_{-6}^{0} \left[\tfrac{1}{6}x + 5 - (x-2)^{2/3} \right] dx = \left[\tfrac{1}{12}x^2 + 5x - \tfrac{3}{5}(x-2)^{5/3} \right]_{-6}^{0}$$

$$= \tfrac{6}{5}\sqrt[3]{4} + 7.8$$

ii) $$A(S_2) = \int_{0}^{2} \left[-\tfrac{4}{3}x + 6 - \left((x-2)^{2/3} + 1 \right) \right] dx$$

$$= \int_{0}^{2} \left[-\tfrac{4}{3}x + 5 - (x-2)^{2/3} \right] dx = \left[-\tfrac{2}{3}x^2 + 5x - \tfrac{3}{5}(x-2)^{5/3} \right]_{0}^{2}$$

$$= -\tfrac{6}{5}\sqrt[3]{6} + \tfrac{22}{3}$$

iii) $$A(S_3) = \int_{2}^{3} \left[-\tfrac{4}{3}x + 6 - \left((x-2)^{2/3} + 1 \right) \right] dx$$

$$= \left[-\tfrac{2}{5}x^2 + 5x - \tfrac{3}{5}(x-2)^{5/3} \right]_{2}^{3} = 2.4$$

Por tanto: $A(S) \approx 17.5333 \ldots$

Ejemplo 3. Hallar el área de la región:

$$S: \begin{cases} y^2 = 4x \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

Solución:

1) Graficar la región S.

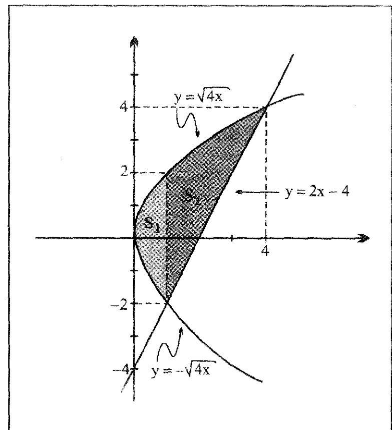
2) Hallar los límites de integración resolviendo el sistema:

$y^2 - 4x$ .... (I)

$2x - y - 4 = 0 \rightarrow y = 2x - 4$ ... (II)

(II) en (I):

$$(2x-4)^2 = 4x$$
$$4x^2 - 16x + 16 = 4x$$



$$4x^2 - 20x + 16 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = -2 \\ x_2 = 4 \rightarrow y_2 = 4 \end{cases}$$

3) Cálculo del área de S.

Se puede hallar de dos maneras:

a) Si deseamos integrar con respecto a x, tendremos dos subregiones S_2 y S_2.

Como: $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \phi$

$$\Rightarrow \quad A(S) = A(S_1) + A(S_2)$$

Donde:

$$A(S_1) = \int_0^1 \left[\sqrt{4x} - (-\sqrt{4x})\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[2\sqrt{4x}\right] dx$$

$$= \int_0^1 4\sqrt{x}\, dx$$

$$= 4 \cdot \tfrac{2}{3} x^{3/2} \Big]_0^1$$

$$A(S_1) = \tfrac{8}{3}$$

$$A(S_2) = \int_1^4 \left[\sqrt{4x} - (2x-4)\right] dx$$

$$= \int_1^4 \left[2\sqrt{x} - 2x + 4)\right] dx$$

$$= 2 \cdot \tfrac{2}{3} x^{3/2} - x^2 + 4x \Big]_1^4$$

$$= \left[\tfrac{4}{3}(4)^{3/2} - 16 + 16\right] - \left[\tfrac{4}{3} - 1 + 4\right]$$

$$A(S_2) = \tfrac{32}{3} - \tfrac{13}{3} = \tfrac{19}{3}$$

Luego: $A(S) = \frac{8}{3} + \frac{19}{3} = 9u^2$

b) Si deseamos integrar con respecto a "y", tendremos una sola integral:

$$A(S) = \int_{-2}^4 \left[f(y) - g(y)\right] dy$$

$$= \int_{-2}^4 \left[\tfrac{1}{2}y + 2 - \tfrac{1}{4}y^2\right] dy$$

$$= \tfrac{1}{4}y^2 + 2y - \tfrac{1}{12}y^3 \Big]_{-2}^4 = 9u^2$$

Donde: $\begin{cases} \text{De: } y^2 = 4x \text{ , despejar } x: x = \frac{1}{4}y^2 = g(y) \\ \text{De: } 2x - 4 = 0 \text{ , despejar } x: x = \frac{1}{2}y + 2 = f(y) \end{cases}$

Nota:
Cuando se integra con respecto a "y" hay que barrer la región con una recta horizontal "imaginaria" desde $y = -2$ hasta $y = 4$, teniendo a la derecha, la función $f(y) = \frac{1}{2}y + 2$ y a la izquierda, la función $g(y) = \frac{1}{4}y^2$.

Ejemplo 4. Hallar la región de $S: \begin{cases} xy = 1 \\ y(x^2+1) = x \\ x \geq 1 \end{cases}$

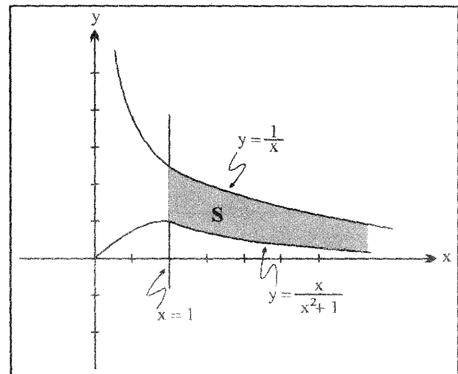
Solución:

1) Graficar la región S.

a) $xy = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{x}$

b) $y(x^2+1) = x \longrightarrow y = \frac{x}{x^2+1}$

c) $x \geq 1$



2) Los límites de integración son:
$x = 1$ y $x \to +\infty$

3) El área de S, es:

$$A(S) = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right] dx$$

$$= \left[\operatorname{Ln} x - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2+1) \right]_{x=1}^{x\to\infty}$$

$$= \operatorname{Ln}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right] \Bigg]_{x=1}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{Ln}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right] - \operatorname{Ln}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \operatorname{Ln}\left[\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \right] + \frac{1}{2}\operatorname{Ln} 2$$

$$= \lim_{x\to\infty} \operatorname{Ln}\left[\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} \right] + \frac{1}{2}\operatorname{Ln} 2$$

$$= \text{Ln}\,1 + \tfrac{1}{2}\,\text{Ln}\,2$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2}$$

$$A(S) = \tfrac{1}{2}\text{Ln}\,2$$

Ejemplo 5. Hallar el área de la región R, limitada por los gráficos de:
$y = |x^3 - 3x^2 - x + 3|$, $x = 3.5$ eje x.

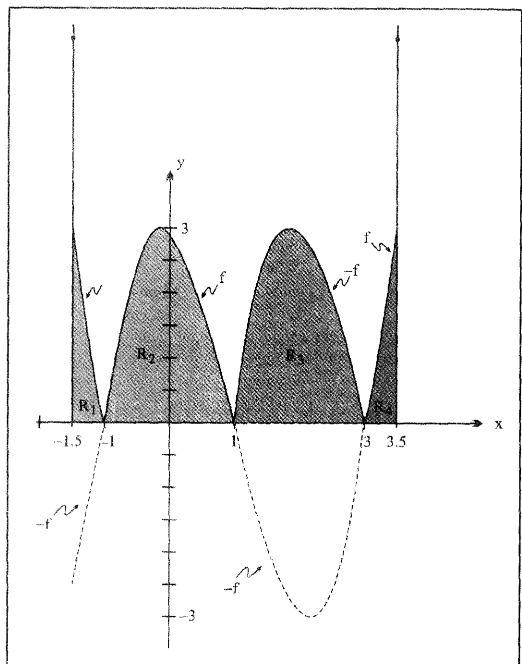
Solución:

1. Graficar la región R.

a) Gráfico de

$y = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$y = |(x+1)(x-1)(x-3)|$



En primer lugar se gráfica.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ por derivada

1) $f'(x) = x^3 - 6x - 1$

2) $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx -0.2 \\ x_2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx \ 2.2 \end{cases}$$

3) $f'(0) > 0$
$\Rightarrow \quad x < -0.2 \ \vee \ x > 2.2$

4) $f'(x) < 0$
$\Rightarrow \quad -0.2 < x < 2.2$

5) $\exists$ máx de f : máx $\cdot f = (-0.2) = 3.07$
$\exists$ mín de f : mín $\cdot f = f(2.2) = -3.07$
En segundo lugar, se grafica el valor absoluto.

El gráfico de $f(x)$ nos conduce a graficar $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$

Lo único que se hace es invertir la gráfica de $-f$.

En el gráfico podemos apreciar que los puntos (puntos esquinas): $x = -1.5$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 3.5$ dividen a la región R en cuatro subregiones: R_1, R_2, R_3 y R_4.

Antes de integrar, debemos analizar los signos del valor absoluto

$$f(x) = |(x+1)(x-1)(x-3)|$$

Una forma práctica de analizar los signos, es observando en la recta real desde $x = -1.5$ hasta $x = 3.5$ dibujando los puntos críticos del valor absoluto.

Los puntos críticos de $f(x) = |(x+1)(x-1)(x-3)|$ son $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Signos de $f(x) = |(x+1)(x-1)(x-3)|$.

-1.5 — $-1.5 - 1.5 \leq x < -1 - 1$ — -1	-1 — $-1 \leq x < 1$ — 1	1 — $1 \leq x < 3$ — 3	3 — $3 \leq x < 3.5$ — 3.5
Analizar con $x = -1.2$	Analizar con $x = 0$	Analizar con $x = 2$	Analizar con $x = 3.2$
$y = \|(-)(-)(-)\|$	$y = \|(x)(-)(-)\|$	$y = \|(+)(+)(-)\|$	$y = \|(+)(+)(+)\|$
entonces:	entonces:	entonces:	
$y = -(x+1)(x-1)(x-3)$	$y = -(x+1)(x-1)(x-3)$	$y = -(x+1)(x-1)(x-3)$	$y = (x+1)(x-1)(x-3)$

2. Los límites de integración, en orden, son $\begin{cases} x = -1.5 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = 3.5 \end{cases}$

Como: $\quad R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$

$$\Rightarrow \quad A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4)$$

Donde:

$$A(R_1) = \int_{-1.5}^{-1} (-f)dx$$

$$= \int_{-1.5}^{-1} \left[-(x^3 - 3x^2 - x + 3)\right] dx = 1.015625$$

$$A(R_2) = \int_{-1}^{-1} (f)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x^3 - 3x^2 - x + 3]\, dx = 4$$

$$A(R_3) = \int_{1}^{3} (-f)\, dx$$

$$= \int_{1}^{3} [-(x^3 - 3x^2 - x + 3)]dx = 4$$

$$A(R_4) = \int_{3}^{3.5} (f)dx$$

$$= \int_{3}^{3.5} [x^3 - 3x^2 - x + 3]dx = 1.265625$$

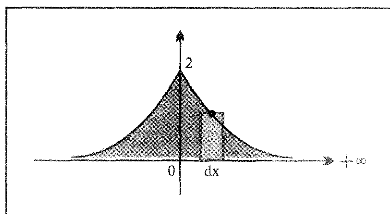
Luego: $A(R) = 10.28125$

Ejemplo 6. Hallar el área de la región acotada por la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{1+e^{x}} & , \text{ si } x \geq 0 \\ \dfrac{4}{1+e^{-x}} & , \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y el eje } x.$$

Solución:

1. El gráfico de la región es:



2. Como la región es simétrica respecto al eje Y, entonces el área es:

$$A = 2\int_0^{+\infty} \frac{4}{1+e^x}\cdot dx$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \frac{4}{1+e^x}\cdot dx$$

como $e^x > 0$, $\forall\, x \in R$ **se puede multiplicar y dividir por** e^x .

$$= 2\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}\, dx$$

$$A = 8\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\cdot dx$$

$$= -8\lim_{b\to+\infty} \mathrm{Ln}(e^{-x}+1)\Big|_0^b$$

$$= -8\lim_{b\to+\infty}\left(\mathrm{Ln}(e^{-b}+1) - \mathrm{Ln}(e^0+1)\right)$$

$$= -8\left(\mathrm{Ln}\,(0+1) - \mathrm{Ln}\,2\right)$$

$$= 8\,\mathrm{Ln}\,2$$

Nota:
También se puede integrar haciendo la siguiente sustitución:

$$e^x = \mu$$
$$x = \mathrm{Ln}\,\mu$$
$$dx = \frac{1}{\mu}\cdot d\mu$$

Luego: $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{1}{\mu}\cdot d\mu$

Fácil de Integrar

Ejemplo 7. Hallar el área de la región limitada por las funciones:

$$y = x^3\, e^{8-2x^2}\ ,\ y = 4x\ .$$

Solución:

1. Graficar las funciones.

a) Graficar $y = x^3\, e^{8-2x^2}$

Tabulando algunos valores para x no es suficiente. Ayudémonos con la derivada para hallar los máximos y mínimos:

De $y = x^3 \cdot e^{8-2x^2}$

$$y' = 3x^2 \cdot e^{8-2x^2} + x^3 \cdot e^{8-2x^2}(-4x)$$
$$= x^2 e^{8-2x^2}(3-4x^2)$$

Analizar:

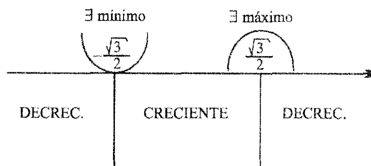
a_1) $y' = 0 \Rightarrow x = 0\,,\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

a_2) y es creciente:

$$\Longleftrightarrow \quad y' > 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad x^2\, e^{8-2x^2}(3-4x^2) > 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad 3-4x^2 > 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad x \in \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

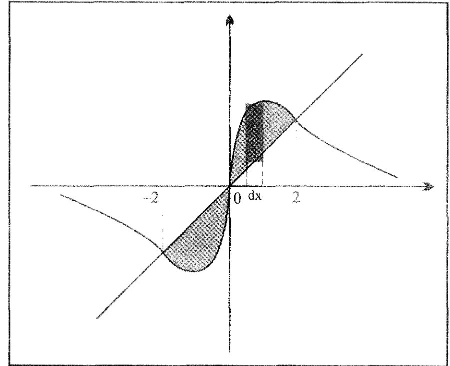
a_3) y es decreciente:

$$\Longleftrightarrow \quad y' > 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad x \in \left\langle -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \infty \right\rangle$$



$$\text{mínimo} = y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}\, e^{6.5}$$
$$\approx -431.5$$

$$\text{máximo} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}\, e^{6.5}$$
$$\approx 431.5$$



2. Límites de integración.
Se obtienen resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \cdot e^{8-2x^2} & \dots\dots\dots \quad (1) \\ y = 4x & \dots\dots\dots \quad (2) \end{cases}$$

Igualar (1) con (2).

$$x^3 \cdot e^{8-2x^2} = 4x \Longleftrightarrow x(x^2 \cdot e^{8-2x^2} - 4) = 0$$
$$\Longleftrightarrow x = 0 \vee x^2 \cdot e^{8-2x^2} = 4$$
$$x = \pm 2$$

3. El área es:

$$A = 2\int_0^2 (x^3 \cdot e^{8-2x^2} - 4x) \cdot dx$$

se integra por partes ($x^3 \cdot e^{8-2x^2}$) — **es directo** ($4x$)

$$I = \int x^3 \cdot e^{8-2x^2}$$
$$= \int \underbrace{x^2}_{\mu} \cdot \underbrace{x\, e^{8-2x^2} \cdot dx}_{dv}$$

$$\mu = x^2 \qquad dv = x \cdot e^{8-2x^2} \cdot dx$$

$$d\mu = 2x \cdot dx \qquad v = -\frac{1}{4}e^{8-2x^2}$$

$$I = -\frac{1}{4}x^2 \cdot e^{8-2x^2} + \frac{1}{2}\int x \cdot e^{8-2x^2} \cdot dx$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 \cdot e^{8-2x^2} - \frac{1}{8}e^{8-2x^2}$$

Luego:

$$A = 2\left[-\frac{1}{4}x^2 \cdot e^{8-2x^2} - \frac{1}{8}e^{8-2x^2} - 2x^2\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{8}e^8 - 9\frac{1}{8}$$

Ejemplo 8. Calcular el área de la región limitada por las líneas: $y = \frac{\text{Ln}\,x}{4x}$, $y = x \cdot \text{Ln}\,x$.

Solución:

1. Sin necesidad de graficar, podemos hallar los límites de integración y luego integrar.

LÍMITES DE INTEGRACIÓN.- Al igualar las ecuaciones obtenemos:

$$\frac{\text{Ln}\,x}{4x} = x \cdot \text{Ln}\,x$$

$$\text{Ln}\,x = 4x^2\,\text{Ln}\,x \quad , \quad x > 0$$

$$\text{Ln}\,x - 4x^2 \cdot \text{Ln}\,x = 0$$

$$\text{Ln}\,x(1-4x^2) = 0 \begin{cases} \text{Ln}\,x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 1-4x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. El área, es el valor absoluto de la siguiente integral definida:

$$A = \int_{1/2}^{1}\left[\frac{\text{Ln}\,x}{4x} - x \cdot \text{Ln}\,x\right] \cdot dx$$

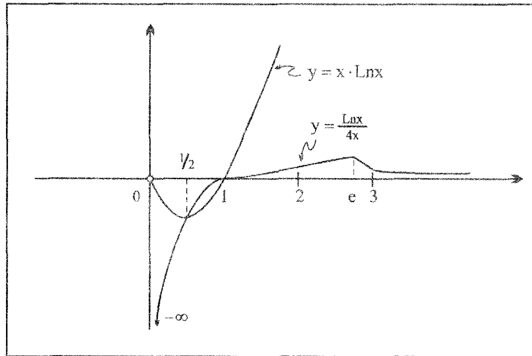
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(\text{Ln}\,x)^2}{2} - \int x \cdot \text{Ln}\,x \cdot dx$$

Por partes

$$= \frac{1}{8}(\operatorname{Ln} x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{Ln} x + \frac{1}{4}x^2 \Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{8}\left(\operatorname{Ln} \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{16} \right]$$

$$= \frac{3 - 2\operatorname{Ln}_2^2 - 2 . \operatorname{Ln} 2}{16}$$



Ejemplo 9. Calcular el área del triángulo curvilíneo limitado por el eje de ordenadas y las líneas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \frac{2}{3}\cos x$.

Solución:

1. Hallemos la intersección de las curvas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}\cos x$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{2}{3}\cos x \quad , \quad \cos x \neq 0$$

$$3\operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$$

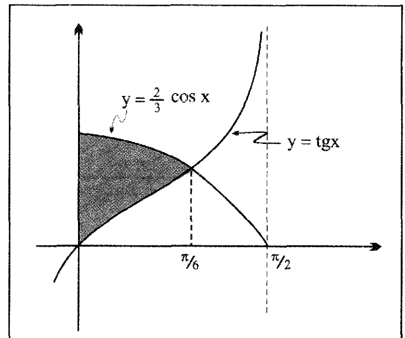
$$= 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 2) = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$



2. El área es: $A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{2}{3}\cos x-\operatorname{tg}x\right)dx$

$$A=\frac{2}{3}\operatorname{sen}x+\operatorname{Ln}\cos x\,\Big]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\operatorname{Ln}\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 10. Hallar el área de la región comprendida entre la línea $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ y su asíntota.

Solución:

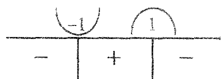
1. Graficar la curva $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Dominio: $x\in\mathbb{R}$

b) Hallar máximos y mínimos.

b_1) Derivar: $y'=1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$



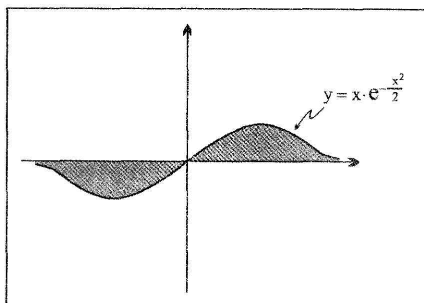
minimo $=y(-1)=-e^{-\frac{1}{2}}$

maximo $=y(1)=e^{-\frac{1}{2}}$

c) ASÍNTOTA:

$$\lim_{x\to+\infty}x\,e^{-\frac{x^2}{2}}=0\quad\Rightarrow\quad y=0\quad\text{es asíntota horizontal}$$

El gráfico es:



2. El área es:

$$A = 2\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

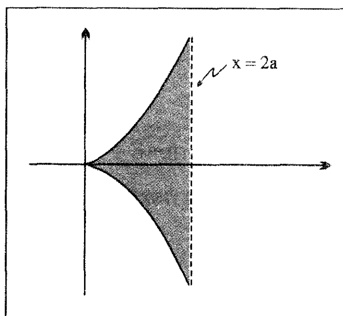
$$= -2\,e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x=0}^{x \to +\infty}$$

$$= 2$$

Ejemplo 11. Hallar el área de la figura comprendida entre la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ y su asíntota.

Solución:

1. El gráfico de la cisoide es:



$$y = \pm\, x\ \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

2. El área es:

$$A = 2 \cdot \int_0^{2a} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx \qquad , \text{ hacer: } \sqrt{\frac{x}{2a-x}} = t$$

$$= 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{2at^2}{1+t^2}\,t \cdot \frac{4at}{(1+t^2)^2} \cdot dt \qquad \frac{x}{2a-x} = t^2$$

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}$$

$$= 16a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^2)^3} \cdot dt \qquad dx = \frac{4at}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= 16a^2 \int_0^{+\infty} t^3 \cdot t(1+t^2)^{-3}\,dt$$

Por partes

$$\mu = t^3 \qquad dv = t(1+t^2)^{-3}\,dt$$

$$d\mu = 3t^2 \cdot dt \qquad v = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+t^2)}{-2}$$

$$I = -\frac{1}{4} \cdot t^3\,(1+t^2)^{-2} + \frac{3}{4}\int t^2 \cdot (1+t^2)^{-2} \cdot dt$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{t^3}{(1+t^2)^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{t}{1+t^2} + \frac{3}{8}\ \text{arctgt}$$

Luego:

$$A = 16a^2\left[-\frac{1}{4}\frac{t^3}{(1+t^2)^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{t}{1+t^2} + \frac{3}{8}\text{arctgt}\right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$= 16a^2\left[\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= -3\pi a^2$$

Ejemplo 12. Hallar el área de la región limitada por la línea $x^2y^2 = 4(x-1)$ y la recta que pasa por sus puntos de inflexión.

Solución:

1. Graficar la linea $x^2 y^2 = 4(x-1)$

$$y = \pm\frac{2\sqrt{x-1}}{x}$$

a) Dominio: $x - 1 \geq 0$

$$x \geq 1$$

b) Es simétrica respecto al eje x, porque al cambiar y por $-y$, no varía la ec.

c) Derivar la función $y = \frac{2\sqrt{x-1}}{x}$

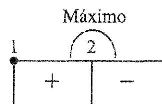
$$y' = \frac{x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x-1} \cdot 1}{x^2}$$

$$y' = \frac{2-x}{x^2\sqrt{x-1}}$$

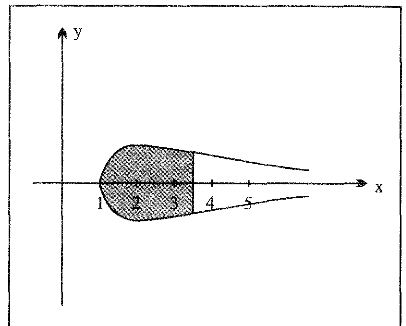
Analizar: c_1) $y' = 0 \Rightarrow x = 2$

c_2) $y' > 0 \Rightarrow x \in \langle 1,2 \rangle$

c_3) $y' < 0 \Rightarrow x \in \langle 2,+\infty \rangle$



máximo $= y(2) = 1$



d) Asíntota horizontal: $y = 0$

porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} = 0$

e) Puntos de inflexión: hallar la segunda derivada

$$y'' = \frac{x^2\sqrt{x-1}(-1) - (2-x)\left[2x\sqrt{x-1} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right]}{x^4(x-1)}$$

$$y'' = \frac{3x^2 - 12x + 8}{2x^3(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

Haciendo $y'' = 0$, obtenemos: $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

Como la curva es simétrica respecto al eje x, los puntos de inflexión recaen en

$\boxed{x = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}} \approx 3.15$

2. El área es:

$$A = 2 \cdot \int_1^{\frac{6+2\sqrt{3}}{3}} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} \cdot dx$$

$$= 4 \cdot \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} \cdot dx \qquad \sqrt{x-1} = t$$

$$= 4 \cdot \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t \cdot dt \qquad x - 1 = t^2$$

$$x = t^2 + 1$$

$$= 8 \cdot \int \frac{t^2}{t^2+1} \cdot dt \qquad dx = 2t \cdot dt$$

$$= 8 \cdot \int \left[1 - \frac{1}{t^2+1}\right] dt$$

$$= 8 \cdot \left[\, t - \operatorname{arctg} t \,\right]_{t=0}^{t=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}}$$

$$= 8 \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} - \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}\,\right]$$

Ejemplo 13. Hallar el área de la región acotada por las líneas $y = 2x^2\, e^x$ e $y = -x^3\, e^x$.

***Solución*:**

1. Límites de la integración:

Resolver el sistema $\begin{cases} y = 2x^2 \cdot e^x \\ y = -x^3 \, e^x \end{cases}$

$$2x^2 \, e^x = -x^3 \, e^x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 e^x (2 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = -2$$

2. El área es el valor absoluto de la siguiente integral:

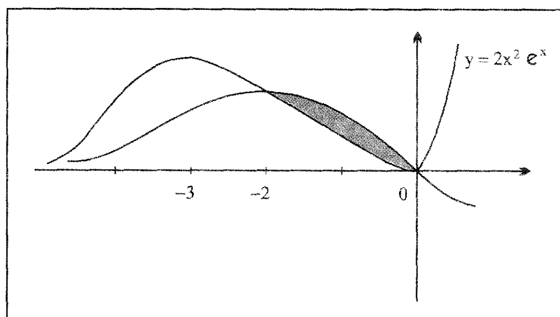
$$A = \int_{-2}^{0} \left[2x^2 e^x - (-x^3 e^x) \right] dx$$

$$= 2 \cdot \int_{-2}^{0} x^2 \cdot e^x + \int_{-1}^{0} x^3 e^x dx$$

Por partes dos veces (primera integral) — **Por partes tres veces** (segunda integral)

$$= \frac{18}{e^2} - 2$$

3. El gráfico es:



Donde:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 e^x = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 e^x = 0$

Ejemplo 14. Hallar el área comprendida entre la curva $y = e^{-x} \cdot \cos x$ y el semieje x positivo.

°Solución:

1. Límites de integración:

Son los puntos donde se intersectan la curva y el eje x.

Dichas intersecciones se hallan haciendo $y = 0$.

Luego: $a^{x} \cdot \cos x = 0$

$$\Rightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \;,\; k \in \mathbb{N}$$

$$= (2k+1)\tfrac{\pi}{2}\,.$$

2. Gráfico de $y = e^{-x} \cdot \cos x$

a) La exponencial $h(x) = e^{-x}$ es asíntota.

b) Máximos y mínimos: $y' = -e^{-x} \cdot \cos x - e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x$

$$= -e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

Hacer $y' = 0 \;\Rightarrow\; \cos x + \operatorname{sen} x = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} \cdot \cos x + \cos\tfrac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen} x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4} + x\right) = 0$$

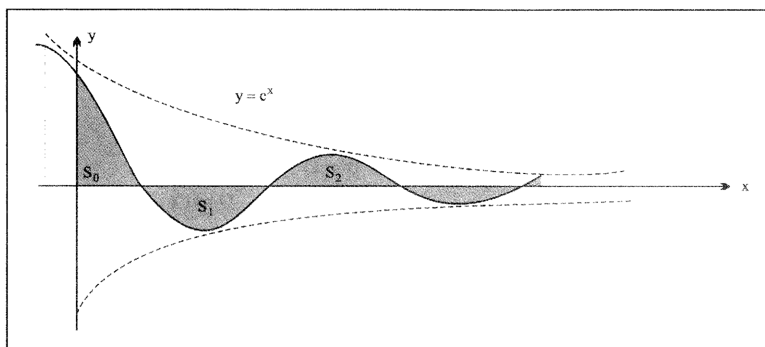
$$\Rightarrow \quad \tfrac{\pi}{4} + x = k\pi$$

$$x = k\pi - \tfrac{\pi}{4}$$

Los máximos y mínimos están en $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

c) Tabulando algunos valores para x.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$y = e^{-x} \cdot \cos x$	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-3\pi/4}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{7\pi/4}$



3. El área es: $A = S_0 + S_1$, donde:

a) $S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx$ y $S = \sum_{k=0}^{\infty} |S_k|$

Es por partes circular

$$= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

b) Supongamos que S_k es el área entre una onda y el eje x, entonces x varía entre $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ y $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Es decir: $(2k-1)\frac{\pi}{2} \le x \le (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Por tanto, el área S_k estará expresado por la integral en valor absoluto:

$$S_k = \int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)} |e^{-x} \cdot \cos x| \cdot dx \quad , \quad k = 1$$

$$= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)\, e^{-x} \Big|_{x=(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{x=(2k+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(2k+1)\tfrac{\pi}{2} - \cos(2k+1)\tfrac{\pi}{2} \right) e^{-(2k+1)\frac{\pi}{2}} - \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(2k-1)\tfrac{\pi}{2} - \cos(2k-1)\tfrac{\pi}{2} \right) e^{-(2k-1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}((-1)^k - 0)e^{-(2k+1)\frac{\pi}{2}} - \tfrac{1}{2}((-1)^{k-1} - 0)e^{(2k-1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^k \cdot e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}(-1)^{k-1} \cdot e^{(2k-1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^k e^{-k\pi}[e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}]$$

En valor absoluto, el área de S_k será: $|S_k| = e^{-k\pi}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}\right)$

Como k varía desde 1 hasta $+\infty$, entonces el área e todas las regiones S_1, S_2 ...., es:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} |S_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi}\underbrace{\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}\right)}_{\cosh\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cos h\frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi}$$

$$= \cos h\frac{\pi}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-k\pi}$$

$$= \cos h\frac{\pi}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-\pi}\left[\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}\right]$$

$$= \cos h\frac{\pi}{2} \cdot e^{-\pi} \frac{1}{1-e^{-\pi}}$$

$$= \cos h\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\pi}}{2e^{-\frac{\pi}{2}}\underbrace{\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\right)}_{\text{sen}\, h\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \text{ctg}\, h\frac{\pi}{2}$$

El área total es: $A = S_0 + S$

$$= \frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \text{ctg}\, h\frac{\pi}{2}$$

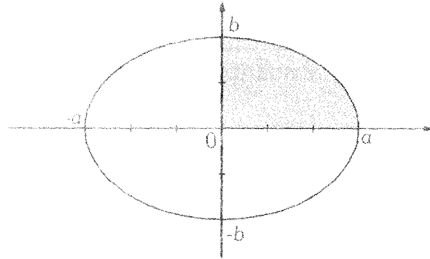
PROBLEMAS RESUELTOS

ÁREAS DE COORDENADAS CARTESIANAS

Problema 01.

Calcular el área comprendida entre la curva.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; \quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$



Solución:

Por ser la elipse una curva simétrica, el área pedida será 4 veces el área encerrada en el cuadrante y los ejes de coordenadas.

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$x=a\operatorname{sen}t$$

$$dx=a\cos t\,dt$$

$$\int_0^r\sqrt{a^2-x^2}=\int\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\,a\cos t\,dt=\int\sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2 t)}\,a\cos t\,dt$$

$$=\int a^2\cos^2 t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=a^2\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2t\right]+C$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$x=0$	$0=r\operatorname{sen}t$	$\operatorname{sen}t=0$	$t=0$
$x=a$	$a=\operatorname{sen}t$	$\operatorname{sen}t=1$	$t=\frac{\pi}{2}$

$$A=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\cdot a^2\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4ab\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi\,ab$$

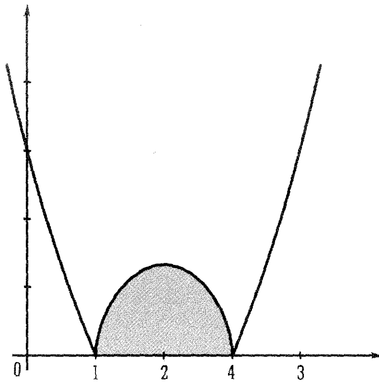
Problema 02.

Calcular el área de la región del plano limitado por la curva $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ y el eje $0x$.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

***Solución*:**



$$A = \int_1^3 -(x^2 - 4x + 3)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3}u^2$$

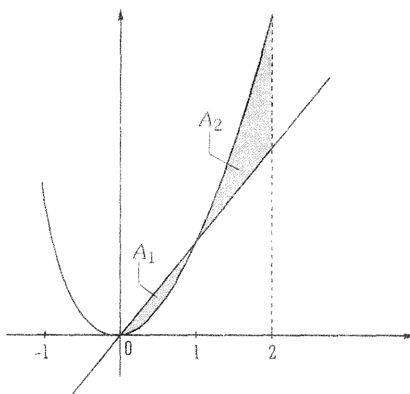
Problema 03.

Hallar el área de la figura limitada por: $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$

Puntos de corte de la parábola y la recta $y = x$.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad x^2 = x \qquad x = 0 \qquad x = 1$$

***Solución*:**



De $x=0$ a $x=1$, la recta queda por encima de la parábola.

$$A_1 = \int_0^1 (x-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}u^2$$

De $x=1$ a $x=2$, la recta queda por debajo de la parábola.

$$A_1 = \int_1^2 (x^2-x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}u^2$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1u^2$$

Problema 04.

Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola y la tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje $0x$.

Puntos de intersección: $4x - x^2 = 0 \qquad x(4-x) = 0 \qquad (0,0) \qquad (4,0)$

***Solución*:**

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (0,0):

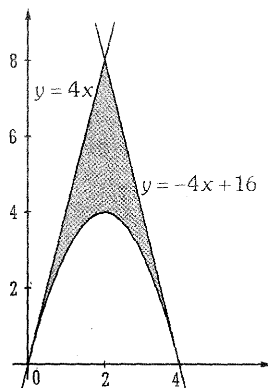
$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(0) = 4$$

$$y - 0 = (x - 0) \qquad y = 4x$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (4,0):

$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(4) = -4$

$y - 0 = (x - 4) \qquad y = -4x + 16$



$$A = \int_0^2 [4x - (4x - x^2)]dx + \int_2^4 [(-4x + 16) - (4x - x^2)]dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x\right]_2^4 = \frac{16}{3}u^2$$

En los problemas del 5 a 12 determine el área de la región acotada por las curvas dadas:

Problema 05.

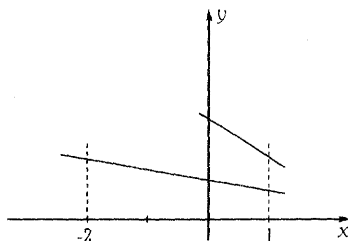
$y = -x + 3 \quad , \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad , \quad x = -2 \quad , \quad x = 1$

***Solución*:**

Según el gráfico:

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(-x + 3) - \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right)\right]dx$$

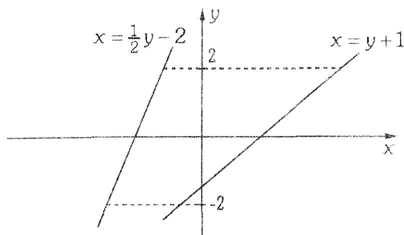
$$A = \int_{-2}^{1} \left(-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x\right]_{-2}^{1} = 6u^2$$



Problema 06.

$y = 2x + 4 \quad , \quad y = x - 1 \quad , \quad y = -2 \quad y \quad y = 2$

Solución:



Del gráfico notamos que es una región de tipo II, por lo que debemos despejar la variable x.

$$y=2x+4 \;\Rightarrow\; x=\tfrac{1}{2}y-2$$
$$y=x-1 \;\Rightarrow\; x=y+1$$

Luego: $A=\int_c^d (f(y)-g(y))dy=\int_{-2}^{2}\left[(y+1)-\left(\frac{1}{2}y-2\right)\right]dy$

$$=\int_{-2}^{2}\left(\frac{y}{2}+3\right)dy=\left[\frac{y^2}{4}+3y\right]_{-2}^{2}=12u^2$$

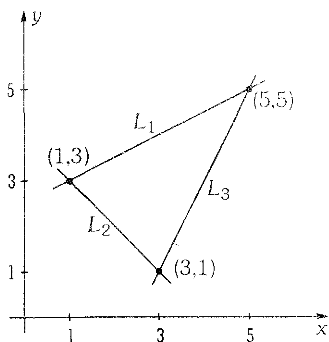
Problema 07.

$x-2y=-5 \quad , \quad x+y=4 \quad , \quad 2x-y=5$

Solución:

Sean: $L_1 : x-2y=-5 \quad , \quad L_2 : x+y=4$

$L_3 : 2x-y=5$



Para realizar el gráfico encontremos los puntos de intersección entre las rectas, resolviendo los sistemas de ecuaciones:

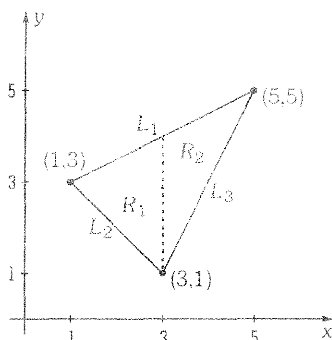
$$\begin{cases} L_1 : x-2y=-5 \\ L_2 : x+y=4 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} L_1 : x-2y=-5 \\ L_3 : 2x-y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_2 : x+y=4 \\ L_3 : 2x-y=5 \end{cases}$$

Así: $L_1 \cap L_2=(1,3) \quad , \quad L_1 \cap L_3=(5,5) \quad , \quad L_2 \cap L_3=(3,1)$

Resolvemos el problema por los dos métodos:

Método 1: (Tipo I) (Integración con respecto a la variable x)



Consideramos dos regiones, y.

$L_1 : f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, $L_2 : g(x) = 4 - x$

$L_3 : h(x) = 2x - 5$

$A =$ área de R_1 + área de R_2

$$A = \int_1^3 (f(x) - g(x))dx + \int_3^5 (f(x) - h(x))dx$$

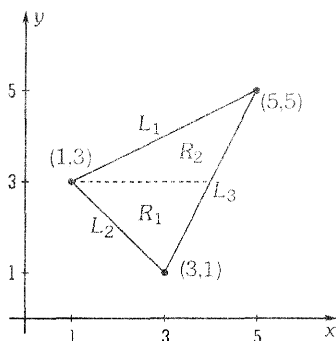
$$A = \int_1^3 \left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - (4 - x)\right] dx$$

$$+ \int_3^5 \left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) - (2x - 5)\right] dx$$

Luego:

$$A = \frac{3}{2}\int_1^3 (x - 1)dx + \frac{3}{2}\int_3^5 (-x + 5)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 + \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_3^5 = 3 + 3 = 6u^2$$

Método 2: (Tipo II) (integración con respecto a la variable y)



Consideramos dos regiones, y.

$L_1 : f(y) = 2y - 5$

$L_2 : g(y) = 4 - y$

$L_3 : h(y) = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$

$A =$ Área de R_1 + Área de R_2

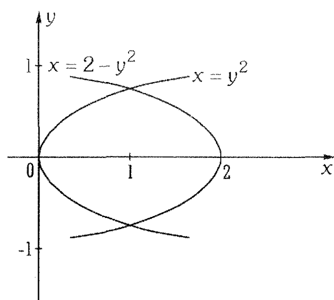
$$A = \int_1^3 (h(y) - g(y))dy + \int_3^5 (h(y) - f(y))dy$$

$$A = \int_1^3 \left[\left(\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right) - (4 - y)\right]dy + \int_3^5 \left[\left(\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right) - (2y - 5)\right]dy$$

Problema 08.

$$x = y^2 \quad , \quad x = 2 - y^2$$

Solución:



Hallamos los puntos de intersección entre las curvas: $y^2 = 2 - y^2 \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y \pm 1$ luego los puntos son $(1,1)$ y $(1,-1)$.

Como la región es simétrica con respecto al eje X, entonces:

$$A = 2\int_0^1 [(2-y^2)-y^2]dy = 4\int_0^1 (1-y^2)dy = \tfrac{8}{3}u^2$$

Problema 09.

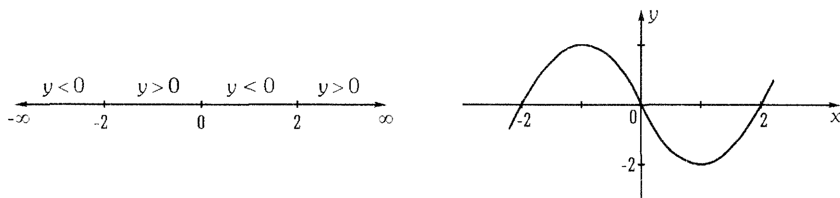
$$y = x^3 - 4x \quad , \quad y = 0$$

Solución:

Intersecando la curva $y = x^3$ con $y = 0$ (eje x)

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0\,,\ x = -2\ ,\ x = 2$$

Determinaremos en qué intervalos $y = x(x+2)(x-2)$ es positivo o negativo. Luego el bosquejo de la gráfica es:

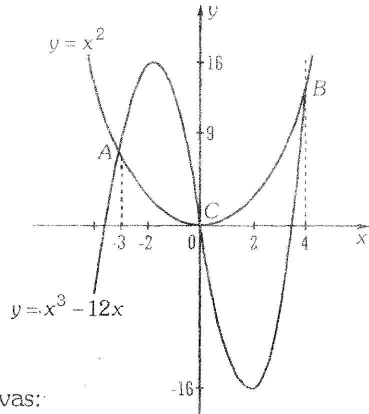


(Si se desea hacer un gráfico más detallado debemos hallar los máximos, mínimos).

Luego: $A = \int_{-2}^{0} [(x^3-4x)-0]dx + \int_0^2 [0-(x^3-4x)]dx = 4 + 4 = 8u^2$

Problema 10.

$y = x^3 - 12x \quad , \quad y = x^2$



Solución:

Grafiquemos la curva $y = x^3 - 12x$, hallemos puntos críticos, máximos y mínimos.

$y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2) = 0$

$$\text{p.c.}\begin{cases} x = -2 & \Rightarrow \text{Punto Máximo: } (-2,16) \\ x = 2 & \Rightarrow \text{Punto Mínimo: } (2,-16) \end{cases}$$

Calculamos los puntos de intersección entre las curvas:

$x^3 - 12x = x^2 \;\Rightarrow\; x^3 - x^2 - 12x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-4)(x+3) = 0$

$x = -3 \;\Rightarrow\; A(-3,9)$

$x = 4 \;\Rightarrow\; B(4,16)$

$x = 0 \;\Rightarrow\; C(0,0)$

Luego: $$A = \int_{-3}^{0} [(x^3 - 12x) - x^2]\,dx + \int_{0}^{4} [x^2 - (x^3 - 12x)]\,dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 6x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{0} + \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + 6x^2\right]_{0}^{4} = \frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \frac{397}{12}u^2$$

Problema 11.

$x = x^3 \, , \; y = 2x \, , \; y = x$

Solución:

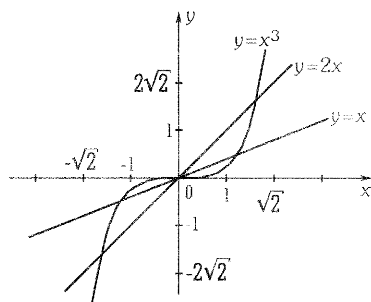
Intersección:

$2x = x^3 \;\Rightarrow\; x(x^2 - 2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow (0,0), (\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$

$x^3 = x \;\Rightarrow\; x(x^2 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = \pm 1$

$\Rightarrow (0,0), (\pm 1, \pm 1)$



$$A = 2\int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3)dx - 2\int_0^1 (x - x^3)dx$$

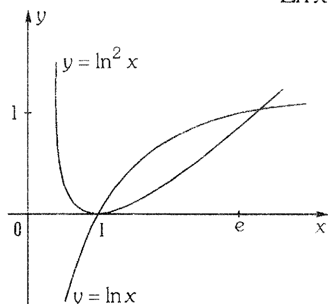
$$A = 2\left[x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{2}} - 2\left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \tfrac{3}{2}u^2$$

Nota:
Este ejercicio pudo resolverse dividiendo la región en dos partes, según tipo I y tipo II.

Problema 12.

$$y = \text{Ln}\,x \quad , \quad y = \text{Ln}^2 x$$

***Solución*:**
Intersección:



$$\text{Ln}\,x = \text{Ln}^2 x \;\Rightarrow\; \text{Ln}\,x(1 - \text{Ln}\,x) = 0 \;\Rightarrow\; \text{Ln}\,x = 0 \;\vee\; \text{Ln}\,x = 1$$

$$\Rightarrow\; x = 1 \;\vee\; x = e \;\Rightarrow\; (1,0),(e,1)$$

$$A = \int_1^e (\text{Ln}x - \text{Ln}^2 x)dx = \int_1^e \text{Ln}x\,dx - \int_1^e \text{Ln}^2 x\,dx$$

$$\int_1^e \text{Ln}x\,dx = e\,\text{Ln}\,e - e - (\text{Ln}1 - 1) = 1$$

Resolvemos la segunda integral por partes:

$$\left\{\begin{matrix} u = \text{Ln}^2 x & \Rightarrow & du = 2\frac{\text{Ln}x}{x}dx \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_1^e \text{Ln}^2 x\,dx = x\text{Ln}^2 x - 2\int_1^e \text{Ln}x\,dx$$

$$= \left[x\text{Ln}^2 x\right]_1^e - 2 = e - 2$$

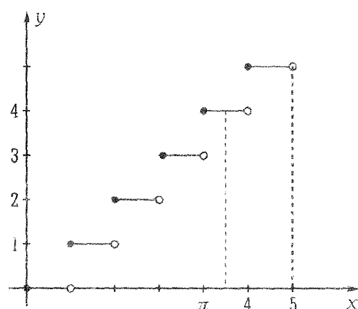
Luego: $A = 1 - e + 2 = (3 - e)u^2$

Problema 13.

Halle el área de la región por debajo de la función $f(x)=[x]$ y encima del eje X, $\forall\ x\in[\pi,5]$.

Solución:

Notemos que la función es seccionalmente continua, por ello:



$$A=\int_{\pi}^{4^-} f(x)dx+\int_{4}^{5^-} f(x)dx$$

$$A=\int_{\pi}^{4^-} [x]dx+\int_{4}^{5^-} [x]dx+\int_{5}^{5} [x]dx$$

$$A=\int_{\pi}^{4} 3dx+\int_{4}^{5} 4dx$$

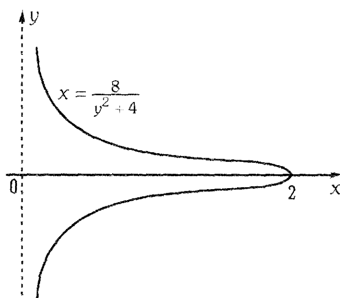
$$A=[3x]_{\pi}^{4}+[4x]_{4}^{5}=(16-3\pi)u^2$$

Problema 14.

Halle el área de la región comprendida entre la línea $xy^2=8-4x$ y su asíntota.

Solución:

Como $y=\pm 2\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} 2\sqrt{\frac{2-x}{x}}=+\infty$, entonces $x=0$ es asíntota de la curva dada.



Para integrar con respecto a y despejamos $x=\frac{8}{y^2+4}$

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8}{y^2+4}dy=2\int_{0}^{\infty}\frac{8}{y^2+4}dy$$

$$=16\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\frac{1}{y^2+4}dy=16\lim_{t\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{y}{2}\right]_{0}^{t}$$

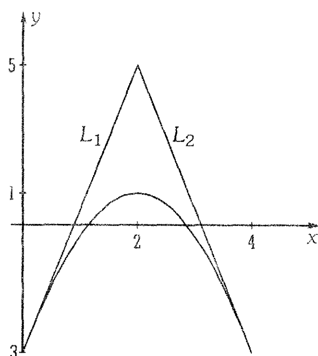
$$A=8\lim_{t\to\infty}\left(\arctan\tfrac{1}{2}-\arctan 0\right)=4\pi u^2$$

Problema 15.

Bosqueje y encuentre el área de la región limitada por la parábola $y=-x^2+4x-3$ y las tangentes a la misma en los puntos $(0,-3)$ y $(4,-3)$.

Solución:

$y=-x^2+4x-3 \quad \Rightarrow \quad y-1=-(x-2)^2$, es una parábola con vértice en $(2,1)$



i) Cálculo de L_1 : pasa por $(0,-3)$

$y'=-2(x-2)=m \quad \Rightarrow \quad m_1=-2(0-2)=4$

$L_1: y-(-3)=4(x-0) \quad \Rightarrow \quad L_1: y=4x-3$

ii) Cálculo de L_2 : pasa por $(4,-3)$

$y'=-2(x-2)=m \quad \Rightarrow \quad m_2=-2(4-2)=-4$

$L_2: y-(-3)=-4(x-4) \Rightarrow L_2: y=-4x+13$

Intersecando L_1 con L_2: $4x-3=-4x+13 \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad P(2,5)$

Nótese que la región es simétrica; luego:

$$A=2\int_0^2 [(4x-3)-(-x^2+4x-3)]dx=2\int_0^2 \left[x^2dx=\tfrac{2}{3}x^3 \right]_0^2=\tfrac{16}{3}u^2$$

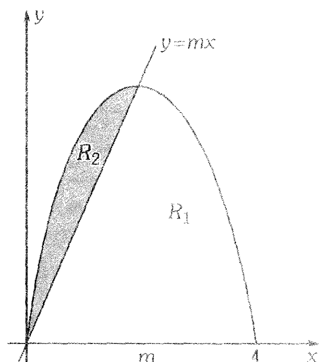
Problema 16.

Sea A_1 el área de la región R_1 encerrada por la curva $f(x)=4x-x^2$ y el eje X, y A_2 el área de la región R_2 encerrada por la curva $f(x)=4x-x^2$ y $y=mx$. Si se sabe que $\frac{A_1}{A_2}=8$, halle el valor de m.

Solución:

$$f(x)=4x-x^2 \quad \Rightarrow \quad -4=-(x-2)^2$$

Parábola de vértice $(2,4)$.



Intersecando la parábola con el eje X:

$$4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0 \Rightarrow x=0, x=4,$$

$$A_1=\int_0^4 (4x-x^2)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{32}{3}u^2$$

Intersecando la parábola $y=4x-x^2$ con la recta $y=mx$:

$$4x-x^2=mx \Rightarrow x(4-m-x)=0 \Rightarrow x=0,$$
$$x=4-m$$

$$A_2=\int_0^{4-m}[(4x-x^2)-mx]dx=\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2\right]_0^{4-m}$$

$$=2(4-m)^2-\frac{1}{3}(4-m)^3-\frac{1}{2}m(4-m)^2$$

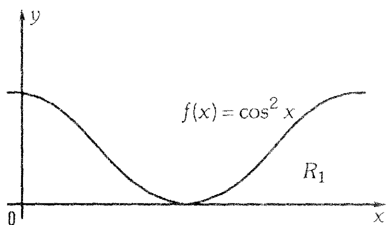
$$A_2=(4-m)^2\left(2-\frac{1}{3}(4-m)-\frac{1}{2}m\right)=\frac{1}{6}(4-m)^3u^2$$

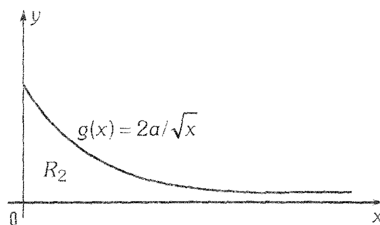
Como: $\frac{A_1}{A_2}=8 \Rightarrow \frac{\frac{32}{3}}{\frac{(4-m)^3}{6}}=8 \Rightarrow (4-m)^3=8 \Rightarrow 4-m=2 \Rightarrow m=2$

Problema 17.

Dada la región R_1 limitada por $f(x)=\cos^2 x$ y el eje X; dada la región R_2 acotada por $g(x)=2a/\sqrt{x}$ y el eje X. Determine el valor de a, si ambas regiones tienen la misma área en el intervalo $[0,\pi]$.

Solución:





$$A_1 = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{2}\Big[x + \tfrac{\text{sen}2x}{2}\Big]_0^{\pi} = \tfrac{\pi}{2}$$

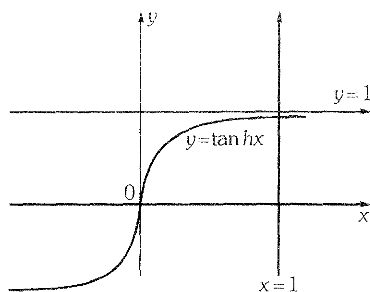
$$A_2 = \int_0^{\pi} 2ax^{-1/2}dx = 2a\big[2x^{1/2}\big]_0^{\pi}\,4a\sqrt{\pi}$$

$$A_1 = A_2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\pi}{2} = 4a\sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{\sqrt{\pi}}{8}$$

Problema 18.

Si $A(r)$ es el área de la región limitada por las curvas $y=1$, $y=\tan hx$, $x=0$, $x=r$, halle $\lim\limits_{x\to+\infty} A(r)$

Solución:



$$A(r) = \int_0^{r}(1-\tan hx)\,dx = [x - \text{Ln}|\cos hx|\,]_0^{r}$$

$$= r - \text{Ln}|\cos hr|$$

$$\lim_{x\to+\infty} A(r) = \lim_{x\to+\infty}(r - \text{Ln}|\cos hr|)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(r - \text{Ln}\left(\frac{e^{r}+e^{-r}}{2}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} A(r) = \lim_{x\to+\infty}\left(r - \text{Ln}\left(\frac{1+e^{-2r}}{2e^{-r}}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}(r - \text{Ln}(1+e^{-2r}) + \text{Ln}(2e^{-r}))$$

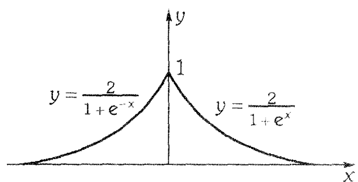
$$= \lim_{x\to+\infty}(r - \text{Ln}(1+e^{-2r}) + \text{Ln}\,2 - r\,\text{Ln}\,e) = \text{Ln}\,2$$

Problema 19.

Halle el área de la región limitada por el eje x y la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+e^{x}} \;, & x \geq 0 \\[2mm] \dfrac{2}{1+e^{-x}} \;, & x < 0 \end{cases}$$

Solución:



$$A=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty}\frac{2}{1+e^x}dx = 4\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+e^x}$$

Integrando por sustitución:

$$u=1+e^x \quad \Rightarrow \quad du=e^x dx$$

Pero: $e^x = u-1 \quad \Rightarrow \quad du=(u-1)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u-1}=dx$

Luego: $\int_0^t \frac{dx}{e^x+1} = \int_*^{**} \frac{du}{(u-1)u}$

Integrando mediante fracciones parciales:

$$\int_*^{**}\frac{du}{(u-1)u} = \int_*^{**}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du = \text{Ln}|u-1| - \text{Ln}|u| = \text{Ln}\left|\frac{u-1}{u}\right|$$

Entonces:

$$\int_0^t \frac{dx}{e^x+1} = \left[\text{Ln}\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|\right]_0^t = \text{Ln}\left|\frac{e^t}{1+e^t}\right| - \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Ln}\left|\frac{1}{e^{-t}+1}\right| - \text{Ln}1 + \text{Ln}2 =$$
$$= -\text{Ln}|e^{-t}+1| + \text{Ln}2$$

Luego: $A = 4\lim_{x\to\infty}(-\text{Ln}|e^{-t}+1| + \text{Ln}2) = 4\text{Ln}2u^2$

PROBLEMAS PROPUESTOS

ÁREA EN COORDENADAS CARTESIANAS.

GRUPO 1

Hallar el área de cada región limitada por las gráficas de las ecuaciones que se dan a continuación.

1. $y = |2x-1|$, $x = 0$, $x = 2$ **Rpta.** $5/2$

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ **Rpta.** $1/3$

3. $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ **Rpta.** $37/12$

4. $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ **Rpta.** $1/2$

5. $y = -x^3 + 4x^2 - 3x$, $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ **Rpta.** $\frac{3253}{96}$

6. $y^2 + x + 4 = 0$ eje Y **Rpta.** $32/3$

7. $x^2 - 3x + y = 0$, $x^3 - 3x^2 + y = 0$ **Rpta.** $37/12$

8. $xy = 1$, $y(x^2 + 1) = x$
   a la derecha de la recta $x = 1$ **Rpta.** $\frac{1}{2}Ln2$

9. $y = e^x$, $y = \frac{1}{x^2+1}$, $x = 1$ **Rpta.** $e - 1 - \frac{\pi}{4}$

10. $y = x^2$, $y = \frac{2}{x^2+1}$ **Rpta.** $\pi - \frac{2}{3}$

11. $y = a \cdot \operatorname{sen} x$, $y = b \cdot \cos x$ **Rpta.** $\frac{8ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

12. $y = 4x^2 - x^4$ **Rpta.** $\frac{32}{3}$

13. $y^2 - 4x = 0$, $y - 2x + 4 = 0$ **Rpta.** 9

14. $x^2 - 6x + y = 0$, $x^2 - 2x - y = 0$ **Rpta.** $\frac{64}{3}$

(15) $y = x^3 = 6x^2 + 8x$, eje x. **Rpta.** 8

(16) $y^2 = x^2 - x^4$ **Rpta.** $\frac{4}{3}$

(17) $y^2 = x^4(x+4)$ **Rpta.** $\frac{4096}{105}$

(18) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ **Rpta.** $\frac{2a^3}{3}$

(19) $9\ a\ y^2 = x\ (3a - x)^2$ **Rpta.** $\frac{8\sqrt{3}\,a^2}{5}$

(20) $y = |x^2 - 4|$, $y = 2$

R. Los límites de integración son: $-\sqrt{6}$, -2 , $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2 , $\sqrt{6}$

Hay tres regiones. La región es simétrica respecto al eje Y.

(21) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 2$ **Rpta.** $e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$

(22) $y = x \cdot e^{-x^2}$, $y = 0$ y la ordenada máxima **Rpta.** $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(23) Las dos ramas de $(2x - y)^2 = x^3$, $x = 4$ **Rpta.** $\frac{128}{5}$

(24) $y = 25 - x^2$

$3y^2 - 256x = 0$ **Rpta.** $\frac{98}{3}$

$9x^2 - 16y = 0$

(25) $y = 4x - x^2$ eje X $x = 1$, $x = 3$ **Rpta.** $\frac{22}{3}$

(26) $y = x \cdot \sqrt{x+5}$, eje x, $x = -1$, $x = 4$ **Rpta.** $\frac{1}{3}\left(40\sqrt{5} - 20\right)$

(27) $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$, $7 \le x \le 12$ **Rpta.** $\frac{42{,}304}{175}$

(28) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, $y = x^2 - 4x$ **Rpta.** $\frac{71}{6}$

(29) $y = 2 - x^2$, $y = -x$ **Rpta.** $\frac{9}{2}$

(30) $y^2 = x - 1$, $x = 3$ **Rpta.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}$

(31) $y^3 = x^2$, $x - 3y + 4 = 0$ **Rpta.** $\frac{27}{10}$

(32) $y^2 - x - 2 = 0$, $y^2 + x - 6 = 0$ **Rpta.** $\frac{64}{3}$

(33) $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$, $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ **Rpta.** $\frac{253}{12}$

(34) $y = |x|$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$ **Rpta.** $\frac{7}{3}$

(35) $y = |x+1| + |x|$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 3$ **Rpta.**

(36) $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$, $x = 4$ **Rpta.** $\frac{128}{5}$

(37) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, $4x - y + 12 = 0$ **Rpta.** 64

(38) $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$, eje X **Rpta.** πa^2

(39) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$ **Rpta.** 4

(40) $y = \frac{x^2}{3}$, $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ **Rpta.** $\frac{32}{3}$

(41) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = \frac{x^2}{2}$ **Rpta.** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

(42) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ **Rpta.** $\frac{3}{8}\ \pi a^2$

(43) Hallar el área de la región comprendida entre la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 9$, el eje OX y el diámetro. **Rpta.** $\frac{9}{2}\text{Ln}3$

(44) Calcular el área de las dos regiones que la parábola $y^2 = 2x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$ **Rpta.** $2\pi + \frac{4}{3}$

(45) $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 = 12(y - 1)$ **Rpta.** $\frac{16}{3}\pi - \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\frac{32}{3}\pi + \frac{4\sqrt{4}}{3}$

GRUPO 2

1. Calcular el área de la región limitada por la curva $C: x^2y^2 + x + 1 = 0$ y la recta vertical $x = -4$.

2. Sea la región $R = \left\{ (x,y) \in R^2 / 1 \leq x \leq 4 \;,\; 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\}$

   i) Hallar el número real "a" tal que la recta $x = a$, divide a R en dos subregiones de igual área.

   ii) Hallar en número real "b" tal que la recta $y = b$, divide a R en dos subregiones de igual área.

3. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$ en el primer cuadrante del plano, su asíntota vertical, el eje X y la recta $x = 8$.

4. Dada la función $f(x) = x^2 \cdot e^x$, se tiene:
   $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por el punto máximo de f cuando $x \leq 0$.
   $\mathcal{L}$ es paralela a la recta tangente a f en el punto $(1,e)$. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de f y $\mathcal{L}$.

5. Sea R la región del plano limitado por las curvas descritas por las ecuaciones:
$$x^2 + y^2 = 4 \;;\; x^2 + (y-5) = 0 \;;\; 3|x| = 2y + 6 \;.$$
   Hallar el área de R.

6. Sea la región $R = (x\,,\,y) / 0 \leq y \leq x^2 \cdot e^{-x^2} \;,\; 0 \leq x \leq b$.
   Hallar: $\lim\limits_{b \to +\infty} \left(\text{Area}\,(R) \right)$.

7. Al graficar las ecuaciones $y^2 = x^4$, $(x-5)^2 + y^2 = 25$ se determinan tres regiones acotadas. Hallar el área de cada una de dichas regiones.

   Sugerencia: Factorizar la ecuación $y^2 = x^4$.

8. Hallar el área de la región limitada por la curva $y^2 = \frac{x(x-1)^2}{2-x}$ y su asíntota, haciendo previamente la gráfica de dicha curva.

9. Hallar el área de la región acotada por la curva $ax^2 + 2hxy + by^2 - 1 = 0$, donde a, b, h son constantes reales positivas tales que $h^2 < ab$.

   Sugerencia: hacer rotación de ejes.

(10) Hallar el área de la región limitada por la curva $y^2 + xy - 2x^2 - 4 = 0$, $y > 0$, por sus asíntotas y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

(11) Calcular el área de la región acotada por: $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$ y su asíntota.

(12) Hallar el área de la región encerrada por la curva $y^2 = x \cdot e^{-2x}$

(13) Calcular el área de la región acotada por $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$ y por los ejes coordenados positivos.

(14) Determinar si es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región acotada por la curva cuya ecuación es $y = \frac{1}{x^2-1}$, el eje X $(x > 2)$ y la recta $x = 2$.

(15) Hallar el área de la región limitada por los ejes coordenados positivos y la curva: $(x^2 + y^2)^5 = (a^2x^3 + b^2y^3)^2$.

(16) La curva: $x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4}$, divide a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en tres regiones. Calcular las áreas de dichas regiones.

(17) Calcular el área de la unión de regiones comprendidas entre la curva $y = e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x$ y el semieje X positivo.

Rpta. $\frac{1}{2} \cdot \operatorname{cotg} h \frac{\pi}{2}$

(18) Hallar el área de la unión de regiones comprendidas entre las funciones $f(x) = e^{-x} \cdot \cos x$ y $g(x) = -e^{-x} \cdot \cos x$ cuando $[0, +\infty\rangle$.

Rpta. $(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) + e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \operatorname{cotg} h \frac{\pi}{2}$

(19) Hallar el área de la región limitada por la línea cerrada $y^2 = (1 - x^2)^3$.

Rpta. $\frac{8}{15}$

(20) Calcular las áreas de las regiones acotadas por las curvas $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

Rpta. $S_1 = S_3 = \pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{Ln}3 - 2\ \text{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$S_1 = 2(\pi - S_1)$

(21) Dada la función $y = \frac{1+2x}{x^2-2x+1}$

Hallar el área de la región limitada por la curva, el eje de las abscisas y las ordenadas $x = 2$, $x = 3$.

Rpta. $2\,\text{Ln}\,2 + \frac{3}{2}$

(22) Hallar el área de la región acotada en el primer cuadrante por la curva $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x(a-x)}}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$, $x = a$.

Rpta. $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}$

(23) Hallar el área de la región acotada por la curva $y = \frac{x^4+3}{6x}$ y la recta $y = \frac{2}{3}x$

Rpta. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\text{Ln}\,3$

(24) Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{x^2+1}{e^x}$, la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = 0$, y el eje OX.

Rpta. $\frac{5}{2}$

(25) Hallar el área de la región acotada por la curva $y = \frac{2\sqrt{x-1}}{x}$, el eje X y la recta vertical que pasa por el punto de inflexión de la curva.

Rpta. $4\left[\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} - \text{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]$

(26) Calcular el área de la región limitada por la curva. $y = \frac{x(x-6)}{x-8}$ y el eje X.

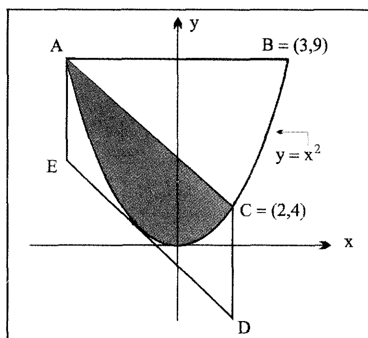
Rpta. $30 - 32\,\text{Ln}\,2$

27 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y=\frac{1}{x^2-x}$, $y=\frac{1}{x^3-x}$ cuando x varía en los siguientes intervalos:

a) $-3 \le x \le -2$
b) $2 \le x \le 3$
c) $x \ge 3$

Solución: a) $\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}\text{Ln}\,2$

28 Demostrar que el área "sombreada" es $\frac{2}{3}$ del área del paralelogramo $ACDE$. El segmento $\overline{ED}$ paralelo al segmento $\overline{AC}$ es tangente a la parábola.



Rpta. $L_{\overline{AC}} : y = -x - \frac{1}{4}$

Área Sombreada $= 125/6$

Área paralelogramo $= \frac{125}{4}$

29 Calcular el área de la región limitada por la curva $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ y las rectas $y=\frac{3}{4}x$; $y=\frac{x}{4}$

Rpta. Los límites de integración son: $x=\frac{84}{17}$, $x=4$, $x=\frac{28}{5}$, $x=\frac{12}{5}$.

30 Hallar el área de la región acotada por: $x^2+y-7=0$, $x^2-y^2=1$, $x=0$, $y=0$.

Rpta. $\frac{13\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{2}\text{Ln}\left(2+\sqrt{5}\right)$

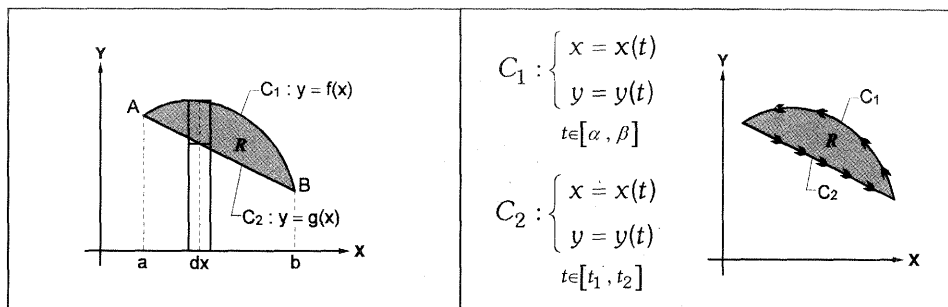
31 Calcular el área de la región formada por los puntos (x,y) del plano que verifican las siguientes condiciones: $x^2+y^2-36 \le 0$, $y^2 \ge 9x$.

Rpta. $24\pi - 3\sqrt{3}$

1.2 ÁREA DE UNA REGIÓN LIMITADA POR UNA CURVA PARAMÉTRICA.

1. INTRODUCCIÓN

Veamos la región R en dos gráficas:



En el primer gráfico, la región R está acotada por dos curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que se intersectan en los puntos A y B. Si las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ están expresadas pos sus correspondientes **ecuaciones cartesianas**, entonces el área de la región R es:

$$\text{Area (R)} = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] \cdot dx$$

En el segundo gráfico, se tiene la misma región acotadas por las mismas curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ cuyas **ecuaciones paramétricas**, respectivamente, se conocen.

En este caso, el área de la región R se halla por una fórmula que se deduce a partir del Teorema de Green (Integrales curvilíneas).

El área de la región R encerrada por las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es:

$$\text{Area}(R) = \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} = \oint_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2}$$

Cuando se quiere integrar sobre una curva cerrada C, la notación usada es: $\oint_{\mathcal{C}}$

Integral a lo largo de la curva C_2

Integral a lo largo de la curva C_1

Donde $\mathcal{C}_2$ es la concatenación (yuxtaposición) de $\mathcal{C}_1$ que encierran a la región R siguiendo una orientación antihoraria y la fórmula de cada integral curvilínea está dada por:

$$\int_{\mathcal{C}_1} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (xdy - ydx)$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (xdy - ydx)$$

Estas fórmulas son válidas, siempre que se cumplan las siguientes hipótesis:

h_1 : Cada curva es regular de clase C^1 en todo el recorrido de t de su dominio

La curva $\mathcal{C}_1$ es REGULAR de CLASE C^1, $\forall\, t$ con $\alpha \le t \le \beta$.

La curva $\mathcal{C}_2$ es REGULAR de CLASE C^1, $\forall\, t$ con $t_1 \le t \le t_2$.

h_2 : La orientación de las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que encierran a la región R, está dada en el SENTIDO DE LA REGIÓN R (es el sentido que sigue una curva de tal manera que la región R esté siempre a la izquierda de la curva).

REMEMBRANZA

Sea la curva $\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha\,,\beta]$

1. La curva $\mathcal{C}$ es de clase C^1 si las funciones $x(t)$, $y(t)$ y sus derivadas $x'(t)$, $y'(t)$ son continuas $\forall\, t \in [\alpha, \beta]$.

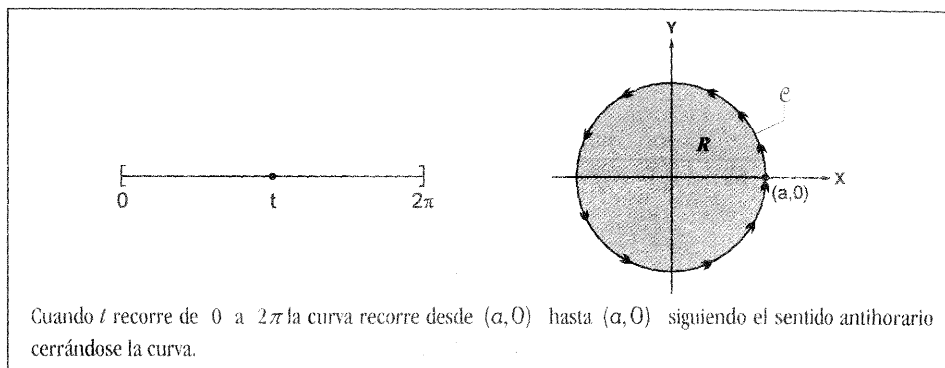
2. La curva $\mathcal{C}$, es **REGULAR** si: $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0 \quad ; \quad \forall\, t \in [\alpha, \beta]$

Ejemplo 01. Hallar el área de la región encerrada por la curva $\mathcal{C}$, donde.

$$C : \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0\,, 2\pi]$$

Solución:

1. El gráfico de la curva C, es una circunferencia de radio a, $a > 0$.



Cuando t recorre de 0 a 2π la curva recorre desde $(a,0)$ hasta $(a,0)$ siguiendo el sentido antihorario cerrándose la curva.

2. Una sola curva encierra la región R (Círculo)

La curva $\mathcal{C}$ (circunferencia) es REGULAR y de clase C^1 $\forall t$, $0 \le t \le 2\pi$. Además la curva tiene orientación antihoraria cuando t recorre desde 0 hasta 2π (es el sentido según la región R, porque la región R está a la izquierda de $\mathcal{C}$).

Luego, el área de la región R encerrada por la curva $\mathcal{C}$, está dada por:

$$\text{Area (R)} = \frac{1}{2}\oint_0^{2\pi} (x\,dy - y\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(a\cos t\,dt) - (a\,\text{sen}\,t)(-a\cdot\text{sen}\,t)dt]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a^2\cos^2 t + a^2\text{sen}^2 t]dt$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} dt$$

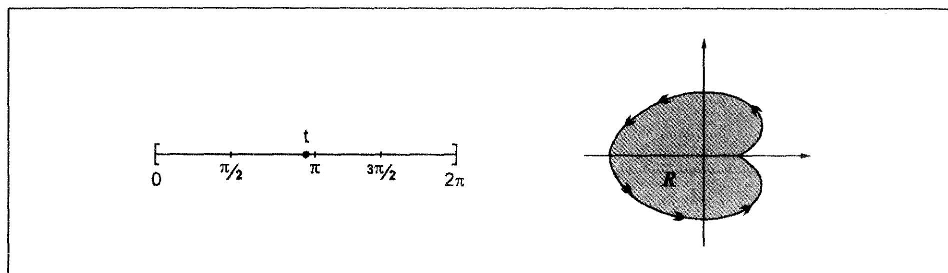
$$= \pi\cdot a^2$$

Ejemplo 02. Hallar el área de la región encerrada por la curva

$$C: \begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,2t) \end{cases}$$

***Solución*:**

1. La curva se cierra en sentido antihorario cuando t varía desde 0 hasta 2π es decir $t \in [0, 2\pi]$.



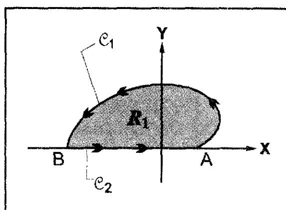
2. El área es:

$$Area(A) = \frac{1}{2}\oint_{0}^{2\pi} (x \cdot dy - y \cdot dx)$$

$$= 6\pi a^2$$

3. El cálculo se puede abreviar cuando la curva es simétrica respecto a uno de los ejes coordenados o cuando alguna curva-frontera de la región es uno de los ejes coordenados.

En este caso: la curva es simétrica respecto al eje X y el área total de la región R es el doble del área de la región R_1 .



La región R_1 está cerrada por la curva C que es la unión de C_1 con C_2 , por lo tanto:

si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

entonces $\oint_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2}$

↑ Área de R_1

Donde: $\mathcal{C}_1$ es el arco $\overset{\frown}{AB}$, cuyas ecuaciones paramétricas están dadas en el problema.

a) $$\int_{\mathcal{C}_1} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x\cdot dy - y\cdot dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big([a\cdot(2\cos t-\cos 2t)][a(2\cos t-2\cos 2t)]\Big)$$

$$-[a(2\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}2t)][a(-2\operatorname{sen}t+2\operatorname{sen}2t])\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(6a^2\pi)$$

$$= 3\,a^2\pi$$

b) Hallemos las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{C}_2$ que coincide con el segmento $\overline{BA}$

Como $\overline{BA}$ es un segmento contenido en el eje X, cada punto es de la forma $(x,0)$ con $-3a \le x \le a$.

Hallemos las ecuaciones paramétricas del segmento $\overline{BA}$ que tenga sentido de B hasta A.

Bastará hacer $x=t$ y cómo $y=0$, entonces las ecuaciones paramétricas de la curva $\mathcal{C}_2$ son:

$$\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad t\in[-3a\,,\,a]$$

$$\text{donde:} \quad \begin{cases} dx = 1\cdot dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

y la integral curvilínea a la lo largo de $\mathcal{C}_2$ es:

$$\int_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{2}\int_{-3a}^{a}(x\cdot dy - y\cdot dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3a}^{a}(t\cdot 0 - 0\cdot 1)\,dt$$

$$= 0$$

c) Por tanto, el área de la región R_1 es:

$$\text{Area}\,(R_1) = \oint_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2}$$
$$= 3a^2\pi + 0$$
$$= 3a^2\pi$$

d) $\text{Area}\ (R) = 2\ \ \text{Area}\ (R_1)$
$$= 6a^2\pi$$

Ejemplo 03. Determinar el área encerrada por el lazo de la curva descrita por $x = t^3 - 4t$, $y = t^2 - 4$.

Solución:

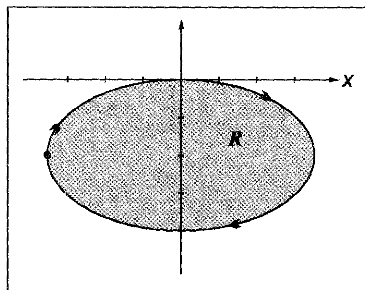
Cuando se trata de hallar el área de una región encerrada por un **LAZO**, todo lo que se necesita es hallar los **PUNTOS DOBLES**.

Hallar t_1 y t_2 tal que $t_1 \neq t_2$

Supongamos que $$(x(t_1)\,,\, y(t_1)) = (x(t_2)\,,\, y(t_2))$$
$$(t_1^3 - 4t_1\,,\, t_1 - 4) = (t_2^3\,,\, t_2 - 4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1^3 - 4t_1 = t_2^3 - 4t_2 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & (1) \\ t_1^2 - 4 = t_2^2 - 4 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1^3 - t_2^3 = 4(t_1 - t_2) \\ t_1^2 = t_2^2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} (t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = 4\,(t_1 - t_2) \\ (t_1 - t_1)\ (t_1 + t_2) = 0 \end{cases}$$

Como se quiere $t_1 \neq t_2$, entonces se reduce a:

$$\begin{cases} t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = 4 & \text{.......................................(1)} \\ \quad t_1 + t_2 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = -t_2 & \text{..........................(2)} \end{cases}$$

(2) en (1): $t_2^2 - t_2^2 + t_2^2 = 4$

$$t_2^2 = 4 \;\Rightarrow\; t_1 = 2 \;\vee\; t_2 = -2$$

Sustituir en (2): Si $t_2 = 2 \;\Rightarrow\; t_1 = -2$

$t_2 = -2 \;\Rightarrow\; t_1 = 2$

De esto podemos deducir que la variable t recorre el intervalo $-2 \leq t \leq 2$.

Cuando $t = -2$ $\Rightarrow$ El primer punto del LAZO es $(0,0)$

Cuando $t = 2$ $\Rightarrow$ El segundo punto del LAZO es $(0,0)$

En consecuencia el área de la región encerrada por el LAZO es:

$$\text{Area}(R) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (x \cdot dy - y \cdot dx)$$

Donde $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} [(t^3 - 4t)\;(2t) - (t^2 - 4)\;(3t^2 - 4)]\,dt$$

$\begin{cases} dx = (3t^2 - 4)\,dt \\ dy = 2t \,.\, dt \end{cases}$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} [-t^4 + 8t^2 - 16]\,dt \qquad \textit{es simétrica}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{0}^{2} [-t^4 + 8t^2 - 16]\,dt$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{8}{3}t^3 - 16t \,\Bigg|_{t=0}^{t=2}$$

$$= -\frac{256}{15}$$

Nota:
El resultado negativo es porque el Lazo se genera en sentido horario (la región R no está a la izquierda). En este caso bastará anteponer el signo menos a la fórmula de la integral curvilínea.

Conclusión: Area $(R) = \frac{256}{15}\,\mu^2$

2. TEOREMA DE GREEN

HIPÓTESIS

1. Sea $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una forma diferencial, donde $A(x,y)$ y $B(x,y)$ son funciones reales de clase C^1 sobre un conjunto abierto $U \subset R^2$.
2. Sea R una región cerrada y acotada (sub-conjunto de R^2) con FRONTERA una curva C cerrada, simple, REGULAR y de clase C^1.
3. La curva C está orientada en sentido antihorario.

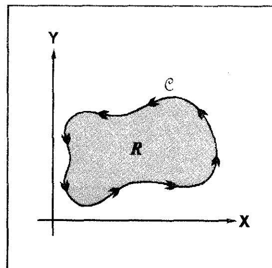
Entonces:

TESIS:

$$\iint_R \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \cdot dy = \oint_{\mathcal{C}} (A(x,y)dx + B(x,y)dy) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

INTEGRAL CURVILÍNEA DE LA FORMA DIFERENCIAL $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ A LO LARGO DE LA CURVA $\mathcal{C}$

INTEGRAL DOBLE DE LA FUNCIÓN $\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$ SOBRE LA REGIÓN R.

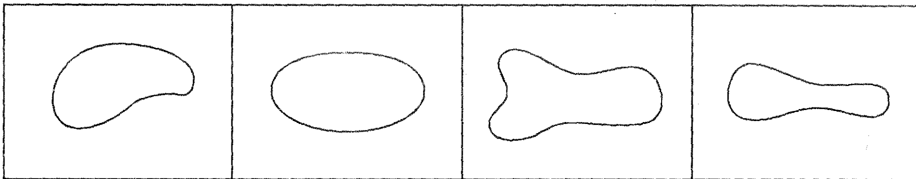


ACLARACIONES DEL TEOREMA DE GREEN

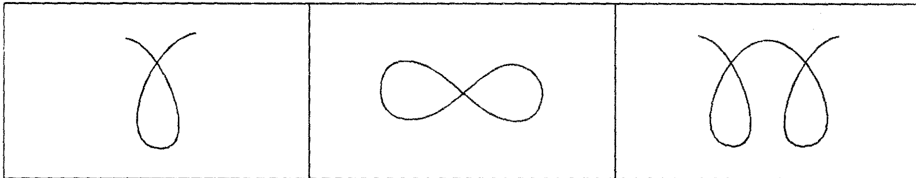
a) Se dice que las funciones reales en dos variables: $A(x,y)$ y $B(x,y)$ son de clase C^1, si las derivadas parciales $\frac{\partial A}{\partial y}$ y $\frac{\partial B}{\partial x}$ son continuas en el conjunto abierto U.

b) Se dice que una curva $\mathcal{C}$ cuyas ecuaciones paramétricas son $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$, es de clase C^1 si sus derivadas $x'(t)$, $y'(t)$ son continuas en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ en el que la curva está definida.

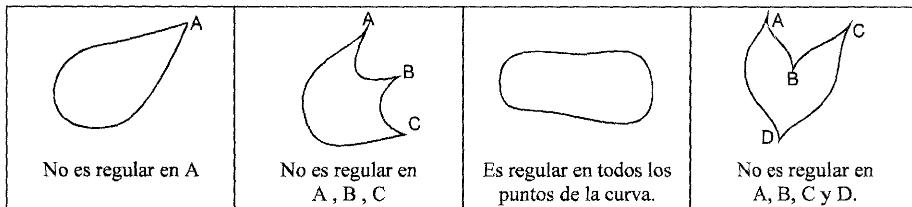
c) Intuitivamente, una curva C es cerrada y simple, cuando tiene una las siguientes formas.



No son simples las siguientes curvas:



d) Intuitivamente, una curva C es regular cuando no tiene puntos angulosos (puntas-agujas).



No es regular en A | No es regular en A , B , C | Es regular en todos los puntos de la curva. | No es regular en A, B, C y D.

e) La fórmula (I) se utiliza frecuentemente para reducir el cálculo de la integral doble al de una integral curvilínea.

Para hallar la integral curvilínea $\oint_{\mathcal{C}} \omega$, se procede del siguiente modo.

1° Hallar las ecuaciones paramétricas de la curva C , si no se conocen.

2° Hallar el intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$ que recorre "t" tal que la curva empieza en $(x(\alpha), y(\alpha))$ y termina en $(x(\beta), y(\beta))$ cerrándose la curva cuando $(x(\alpha), y(\alpha)) = (x(\beta), (\beta))$. La curva se orienta en sentido antihorario.

f) Reemplazar en la integral curvilínea: x, y, dx, dy en términos de t. Así tendremos:

$$\oint_{\mathcal{C}} (A(x,y)dx + B(x,y)\cdot dy) = \int_{\alpha}^{\beta} [A(x(t),y(t))\cdot x'(t) + B(x(t),y(t))\cdot y'(t)]\cdot dt$$

g) INTERPRETACIÓN FÍSICA.

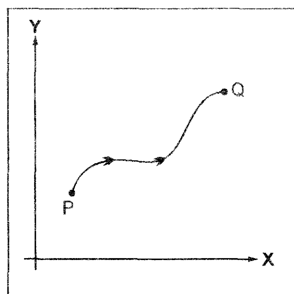
La forma diferencia $\omega = A(x,y)\cdot dx + B(x,y)\cdot dy$

$$\omega = (A(x,y), B(x,y)) \cdot (dx \cdot dy)$$

$$\omega = \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}'(t)dt$$

Entonces la integral $W = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot r'(t)dt$

expresa el trabajo que desarrolla la fuerza $\vec{F}$ cuando una partícula se desplaza por el camino $\vec{r}(t)$ desde el punto $P = \vec{r}(\alpha)$ hasta el punto $Q = \vec{r}(\beta)$.



El camino $\vec{r}(t)$ es la función vectorial

$$\vec{r} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

El vector velocidad es $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$

h) En la fórmula (I) si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n$ donde cada curva $\mathcal{C}_i$ es regular de clase C^1, entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega + \ldots + \int_{\mathcal{C}_n} \omega , \quad \text{donde } \omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

i) Sea la función $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$

$$(x,y) \longrightarrow z = F(x,y)$$

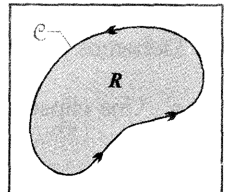
El diferencial de F es: $dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy$

$$\omega = A \cdot dx + B \cdot dy$$

COROLARIO

Si en la fórmula (I): $\iint_R \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \cdot dy = \oint_{\mathcal{C}} A(x,y)dx + B(x,y)dy$,

se hace $\underbrace{\frac{\partial B}{\partial x}}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{\partial A}{\partial y}}_{-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$, entonces: a) $B = \frac{1}{2}x$ y $A = -\frac{1}{2}y$

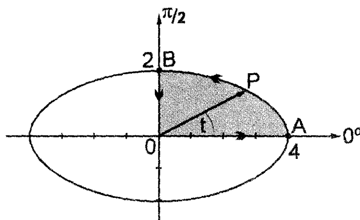


b) $\underbrace{\iint_R dx\, dy}_{\text{área de la región R}} = \frac{1}{2} \underbrace{\oint (x\,dy - y\,dy)}_{\text{integral de línea sobre la curva cerrada } \mathcal{C}\text{, que es la frontera de la región R}}$ ...... (1)

c) Si la región R está limitada por la curva $\mathcal{C}$, el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$, el área de la región R es $A(R) = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) \cdot dt$ C está parametrizada por: $\vec{r} : [\alpha , \beta] \rightarrow I\!R^2$, $t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$	Y, $\mathcal{C}$, x = a, R, x = b, X, a, b
d) Si la región R está limitada por la curva $\mathcal{C}$, el eje Y y las rectas $y = c$, $y = d$, el área de la región R es: $A(R) = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y(t) \cdot dt$ $\mathcal{C}$ está parametrizada por: $\vec{r} : [\alpha , \beta] \rightarrow I\!R^2$, $t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$	Y, y = d, d, $\mathcal{C}$, c, y = c, X

Nota: La integral de línea a lo largo de una recta horizontal o vertical es cero.

Ejemplo 04. Hallar el área de la región R, dado en el gráfico adjunto.



***Solución*:**

Aplicar la fórmula dado en c) $A(R) = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)dt$

Pasos a seguir:

1. Debemos dar el sentido que corresponde a las fronteras de la región R (dicho sentido es tal que la región R esté a la izquierda).

2. Debemos parametrizar la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ desde el punto A hasta el punto B.

- Una elipse dada por la ecuación cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

  se parametriza haciendo $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\, t \end{cases}$

  donde "t" es el ángulo entre el eje $\overrightarrow{OX}$ y el radio vector $\overrightarrow{OP}$

- Para el problema dado, será $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$

  donde $\underset{\alpha}{\underset{\uparrow}{0}} \le t \le \underset{\beta}{\underset{\uparrow}{\frac{\pi}{2}}}$, porque $A = (4\cos 0, 2\text{sen}0) = (4,0)$

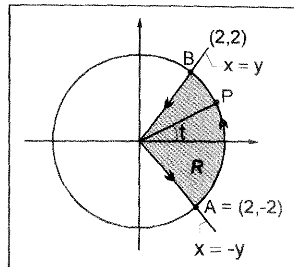
  $B = \left(4\cos\frac{\pi}{2}, 2\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (0,2)$

3. Cálculo auxiliar: $x'(t) = -a\,\text{sen}\, t$

4. Aplicar la fórmula: $A(R) = -\int_0^{\pi/2} (2\,\text{sen}\, t)(-4\,\text{sen}\, t)dt$

$$= 8\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\, t = 2\pi$$

Ejemplo 05. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones: $x = |y|$, $x^2 + y^2 = 8$.



Solución:

- Después de darle sentido a las fronteras de la región R, cerrando el circuito, se parametrizan cada frontera:

a) La parametrización del segmento $\overrightarrow{OA}$ es:

$\vec{r}(t) = (0,0) + t[(2,-2) - (0,0)]$, $0 \le t \le 1$

$\vec{r}(t) = (2t, -2t)$, $0 \le t \le 1$

b) La parametrización del arco $\widehat{AB}$ es: $\vec{r}(t) = (\sqrt{8}\cos t, \sqrt{8}\,\mathrm{sen}\, t)$, $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$

c) La parametrización del segmento $\overrightarrow{BO}$, es:

$\vec{r}(t) = (2,2) + t[(0,0) - (2,2)]$, $0 \le t \le 1$

$\vec{r}(t) = (2 - 2t\ ,\ 2 - 2t)$, $0 \le t \le 1$

- El área de la región R es:

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^1 (xdy - ydx) + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} (xdy - ydx) + \frac{1}{2}\int_0^1 (xdy - ydx)$$

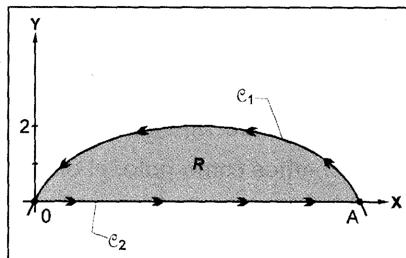
- Hacer los cálculos auxiliares para obtener $A(R) = 2\pi$

Ejemplo 06.

Hallar el área de la región limitada por la curva: $\mathcal{C}: \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 2 - 2t^2 \end{cases}$ y el eje X.

Solución:

1. La gráfica de la curva es:



2. Los límites de integración se hallan en los puntos de intersección con el eje X. La intersección de la curva con el eje X se halla haciendo $y = 0$.

   Si $y = 0 \Rightarrow 0 = 2 - 2t^2$

   $\Rightarrow t = \pm 1$

   Luego $\boxed{-1 \le t \le 1}$

La función vectorial continua que parametriza a la curva $\mathcal{C}$ es:

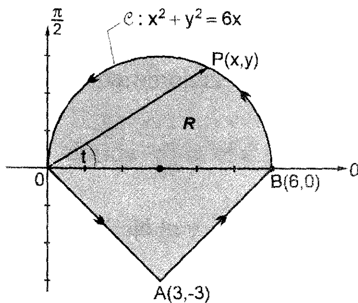
$$\vec{r}:[-1,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to \vec{r}(t)=(4-4t\,,\,2-2t^2)$$

- En este caso, por la forma que tiene la región, conviene aplicar la fórmula dado en c) del corolario.

$$A(R)=-\int_{-1}^{1} y(t)\,x'(t)dt$$
$$=-\int_{-1}^{1}(2-2t^2)(-4)dt$$
$$=8\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt=8\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=1}=\frac{32}{3}$$

Ejemplo 07. Hallar el área de la región R.

Solución:



El área de la región R, es:

$$A(R)=\frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}\cup\overrightarrow{OA}\cup\overrightarrow{AB}} \overbrace{x\,dy-y\,dx}^{\omega}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{\mathcal{C}}\omega+\int_{\overrightarrow{OA}}\omega+\int_{\overrightarrow{AB}}\omega\right\}$$

a) Para calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}}\omega$, debemos parametrizar el arco de circunferencia $\widehat{BO}$ del siguiente modo.

Si tomamos como polo, el origen $(0,0)$ y $\overrightarrow{OP}$ es el radio vector, el punto (x,y) en coordenadas polares es (1) $\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\,\text{sen}\,t \end{cases}$ donde r se obtiene de:

$$x^2+y^2=6x$$
$$r^2=6r\cos t$$
$$r=6\cos t\ \ldots\ldots\ (2)$$

Al reemplazar (2) en (1), obtenemos la función vectorial

$$\vec{r}:[0,\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow \vec{r}(t)=(6\cos^2 t\ ,\ 3\text{sen}\,2t)$$

- $$\int_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx = \int_0^{\pi/2} [(6\cos^2 t)(6\cos 2t)-(3\,\text{sen}\,2t)(-12\cos t\,\text{sen}\,t)]dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} 36\cos^2 t\,dt = 9\pi$$

b) La integral de línea $\int_{\overline{AB}} \omega$ se obtiene parametrizando el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, del siguiente modo:

$$\vec{r}(t)=A+t(B-A)\ ,\ 0\le t\le 1$$
$$\vec{r}(t)=(3+3t,-3+3t)\ ,\ 0\le t\le 1$$

Luego: $$\int_{\overline{AB}} x\,dy-y\,dx=\int_0^1 [(3+3t)(3)-(-3+3t)(3)]=18$$

CONCLUSIÓN: El área de la región R, es: $A(R)=\frac{1}{2}\{9\pi+0+18\}=\frac{9}{2}\pi+9$

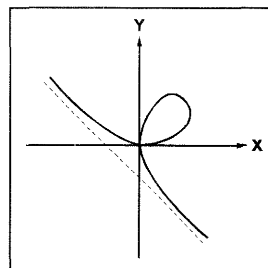
Ejemplo 08. Hallar el área de la región limitada por el lazo $x^3+y^3-3axy=0$

Solución:

1. Parametrizar la curva con la sustitución, $y=tx$.

$$x^3+t^3x^3-3ax\cdot tx=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\,at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3\,at^2}{1+t^3} \end{cases}$$



2. Como la curva forma un lazo, hallemos los puntos dobles, que van a ser precisamente los límites de integración.

Hallar t_1 y t_2 tal que $t_1 \neq t_2$

Supongamos que: $\left(x(t_1), y(t_1) \right) = \left(x(t_2), y(t_2) \right)$

$$\left(\frac{3\,at_1}{1+t_1^3}, \frac{3\,at_1^2}{1+t_1^3} \right) = \left(\frac{3\,at_2}{1+t_2^3}, \frac{3\,at_2^2}{1+t_2^3} \right)$$

Igualar componentes y resolver las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{3at_1}{1+t_1^3} = \dfrac{3at_2}{1+t_2^3} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ \dfrac{3at_1^2}{1+t_1^3} = \dfrac{3at_2^2}{1+t_2^3} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1(1+t_2^3) = t_2(1+t_1^3) \;\Rightarrow\; 1+t_2^3 = \frac{t_2}{t_1}(1+t_1^3) & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ t_1^2(1+t_1^3) = t_2^3(1+t_1^3) & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

(1) en (2): $\quad t_1^2 \cdot \frac{t_2}{t_1}(1+t_1^3) = t_2^2(1+t_1^3)$

$\Rightarrow \quad t_1^2 \cdot t_2(1+t_1^3) = t_1\, t_2^2(1+t_1^3)$

$\Rightarrow \quad t_1t_2(1+t_1^3)\;(t_1-t_2) = 0 \qquad$ como $t_1 \neq t_2$

$\Rightarrow \quad t_1t_2\,(1+t_1^3) = 0$

$\Rightarrow \quad t_1 = 0 \vee t_2 = 0 \quad \vee \quad t_1 = -1$

No puede ser, porque $D_{x \cap y} = R - \{-1\}$

En este caso, solo tenemos una única solución real: $t = 0$

Cuando $t = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$. Punto inicial $P = (0,0)$

Deseamos hallar otro valor de t tal que $x = 0 \wedge y = 0$

en este caso se cumple: $\quad x = 0$ cuando $t \to +\infty$

$\qquad y = 0$ cuando $t \to +\infty$

Por tanto, los límites de integración son: $t = 0$ y $t \to +\infty$

3. El área de la región es:

$$A=\frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}}(x\cdot dy-y\cdot dx) \qquad \mathcal{C}:\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}$$

En la forma diferencial: $\omega = x\cdot dy - y\cdot dx$

Multiplicar y dividir por x^2:

$$\omega = x^2\left[\frac{x\cdot dy-y\cdot dx}{x^2}\right]$$

$$= x^2\cdot d\left(\frac{y}{x}\right) \text{, al dividir } \frac{y}{x}$$

$$= x^2\cdot dt \qquad \text{obtenemos: } \frac{y}{x}=t$$

El área de A es:

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}}x^2\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2\cdot dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\cdot dt$$

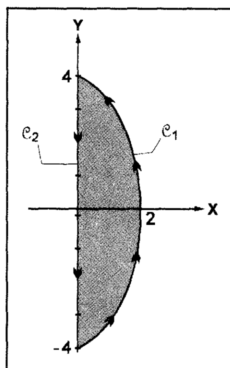
$$=\frac{1}{2}\cdot 9a^2\int_0^{+\infty}t^2(1+t^3)^{-2}\cdot dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}$$

Nota: Sin hacer ningún artificio, igual resultado se obtiene cuando en la forma diferencial $\omega = x\,dy - y\,dx$ se sustituye las ecuaciones paramétricas y las diferenciales.

Ejemplo 09. Hallar el área de la región limitada por la curva C: $x=1-\cos 2t$, $y=4\cos t$ y el eje Y.

***Solución*:**



1. Al graficar la curva $\mathcal{C}$ se obtiene:

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$x=1-\cos 2t$	0	1	2	1	0
$y=4\cdot\cos t$	4	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	-4

2. El área de la región R, es: $A(R)=\frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2} x\,dy-y\,dx$

Si aplicamos el corolario, porque $\mathcal{C}_2$ es un segmento vertical, la fórmula se reduce a la forma:

$$A(R)=\int_{\mathcal{C}_2} x(t)\,y'(t)dt \quad \text{, donde } dy=y'(t)dt$$

$$=-\int_0^{\pi} x\cdot dy$$ ...... el signo – es porque estamos cambiando el sentido de la parametrización de $\mathcal{C}_2$ (que no sigue la dirección según la región R).

$$=-\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)(-4\ \mathrm{sen}\,t)\cdot dt$$

$$=-\int_0^{\pi}(-4\cdot\mathrm{sen}\,t+4\,\mathrm{sen}\,t\cdot\cos 2t)\cdot 4t$$

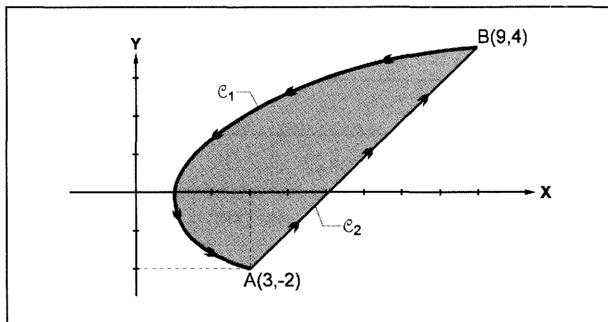
$$=\frac{14}{3}\,\mu^2$$

Ejemplo 10. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las curvas:

$$\mathcal{C}_1:\begin{cases} x=\frac{1}{2}(t^2+2) \\ y=t \end{cases} \quad -2\le t\le 4 \qquad\qquad \mathcal{C}_2:\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+t \end{cases} \quad 0\le t\le 6$$

***Solución*:**

1. El gráfico es:



2. La curva $\mathcal{C}_1$ tiene orientación horaria (–) y la curva $\mathcal{C}_2$ tiene orientación antihoraria (+), entonces al área de la región R es: $A(R) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega\right]$

a) El cálculo de $\int_{\mathcal{C}_1} \omega$ se hace con la parametrización de $\mathcal{C}_1$.

Como la parametrización de $\mathcal{C}_1$ no sigue la dirección según la región R, entonces: $\int_{\mathcal{C}_1} \omega = -\int_{-2}^{4} x\,dy - y\,dx = -(-3) = 3$

b) El cálculo de $\int_{\mathcal{C}_2} \omega$ se hace con la parametrización de $\mathcal{C}_2$, esto es:

$\int_{\mathcal{C}_2} \omega = \int_0^6 x\,dy - y\,dx = 15$ **CONCLUSIÓN:** $A(R) = 3 + 15 = 18$

PROBLEMAS PROPUESTOS

ÁREAS DE REGIONES LIMITADAS POR CURVAS PARAMETRIZADAS

1 Hallar el área de la región limitada por un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$ $y = a(1 - \cos t)$ el eje de las abscisas.

2 Calcular el área de la región limitada por la astroide: $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \operatorname{sen}^3 t$

3 Hallar el área del lazo de la línea $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$.

4 Hallar el área del lazo de la línea $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

5 Hallar el área de la figura limitada por la rama de la trocoide:

$$\begin{cases} x = a\,t - b \operatorname{sen} t \\ y = a - b \cos t \end{cases} \quad (0 \le b \le a)$$

y la tangente a la misma en sus puntos interiores.

6 Hallar el área de la región limitada por la curva con ecuaciones paramétricas $x = 2t - 1$, $y = 12t - 4t^2$ y el eje X.

7 Calcular el área de la región encerrada por el lazo de la curva $\mathcal{C}$, cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = t^2 - t$, $y = t^3 - 3t$.

8 Hallar el área de la región limitada por la curva con ecuaciones paramétricas $x = \frac{t^2}{4}$, $y = 4t^3$, $t \geq 0$ y las líneas de las ecuaciones $x = 1$ y $x = 4$.

9 Hallar el área de la región encerrada por el lazo de la curva $\mathcal{C}$: $x = t^3 - t$, $y = t + t^2$.

10 Hallar el área de la región encerrada por la curva: $x = \cos^3 t$, $y = \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t$.

11 Hallar el área de la región limitada por la curva $\mathcal{C}$:
$x = 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^2\theta \cdot \operatorname{tg}\theta$ y su asíntota $\left(\text{en esta caso } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

12 Hallar el área de la región limitada por la curva $\mathcal{C}$:
$x = 2 \cdot \operatorname{ctg}\theta$, $y = 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta$, $0 < \theta < \pi$ y el eje X.

13 Hallar el área de la región acotada por la curva: $x = \frac{c^2}{a} \cdot \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \cdot \operatorname{sen}^3 t$, $(c^2 = a^2 - b^2)$, (envoluta de la elipse).

14 Calcular el área de la región acotada por la curva: $x = a \cdot \cos t$, $y = \frac{a \cdot \operatorname{sen}^2 t}{2 + \operatorname{sen} t}$

15 Hallar el área encerrada por el lazo de la curva: $\mathcal{C} : \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$ $t \in R$

RESPUESTAS:

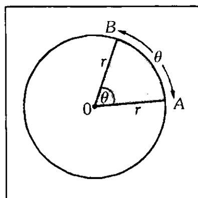
1	$3\pi a^2$	2	$\frac{3}{8}\pi a^2$	3	$\frac{72}{5}\sqrt{3}$	4	$\frac{8}{15}$
5	$\pi(b^2 + 2ab)$	6	36	7	$\frac{81}{20}$	8	
9	$\frac{1}{60}$	10	$\frac{3\pi}{8}$	11	$\frac{3\pi}{2}$	12	
13	$\frac{3\pi}{8} \cdot \frac{c^4}{ab}$	14	$\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9\right)$				

1.3 ÁREA DE UNA REGIÓN LIMITADA POR UNA CURVA EN COORDENADAS POLARES

1. INTRODUCCIÓN

Intuitivamente, la fórmula que nos permite hallar el área de una región limitada por una curva en coordenadas polares, se deduce a partir de la fórmula que corresponde al área de un sector circular.

Veamos:



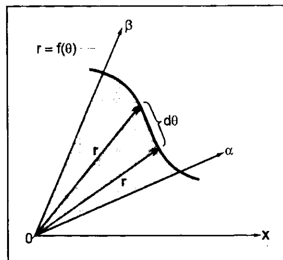
a) Por regla de tres simples tenemos:
Si al arco 2π corresponde el área πr^2 entonces al arco θ. ¿Qué área corresponderá?.

$$2\pi \to \pi r^2$$
$$\theta \to A$$

$$A = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} r^2 \theta}$$ $r =$ radio de la circunferencia.

ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR DE ARCO θ Y RADIO r



b) El área que corresponde al sector de arco $d\theta$ es:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\theta \quad , \quad r = f(\theta)$$

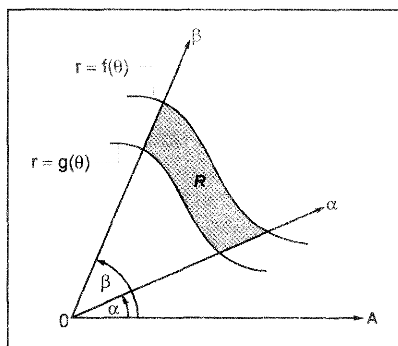
Por tanto, el área que corresponde a la REGIÓN limitada por $r = f(\theta)$ y los rayos α y β será:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \cdot d\theta}$$

Donde la función $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es continua en $[\alpha, \beta]$ y $r \geq 0$, $\forall\, \theta \in [\alpha, \beta]$

$$\theta \to r = f(\theta)$$

c) Sea la región $R = \left\{ (r,\theta) \in I\!R^2 / 0 \leq g(\theta) \leq f(\theta)\, , \alpha \leq \theta \leq \beta \right\}$



donde las funciones:

$$f : [\alpha\, , \beta] \to I\!R$$

$$y \qquad g : [\, \alpha\, , \beta\,] \to I\!R$$

son continuas en $[\alpha, \beta]$.

Entonces el área de la región R, es:

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)]\, d\theta$$

Observación *La fórmula definida en b) se puede hallar aplicando suma de Riemann.*

Veamos:

TEOREMA Sea la región $R = \left\{ (r,\theta) \in R^2 / r = f(\theta) \geq 0, \alpha \leq \theta \leq \beta \right\}$ donde la función $f : [\alpha, \beta] \to I\!R$ es continua en el intervalo $[\alpha, \beta]$, entonces el área de la región R es:

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) \cdot d\theta .$$

Demostración:

Deseamos hallar el área de la región R (ver fig. 2)

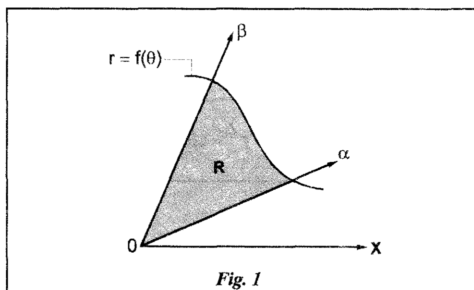


Fig. 1

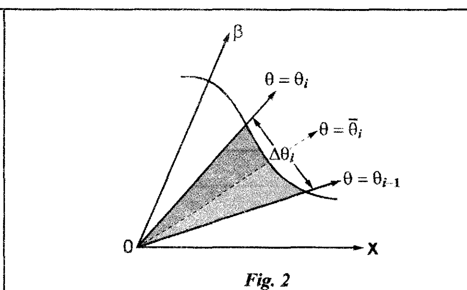


Fig. 2

1. Consideremos una partición P de $[\alpha,\beta]$ definida por:

$$P=(\alpha=\theta_0\,,\theta_1\,,\theta_2\,,\ldots,\theta_{i-1}\,,\theta_i\,,\ldots,\theta_n=\beta)$$

tal que $\quad \alpha=\theta_0\leq\theta_1<\ldots<\theta_{i-1}<\theta_i<\ldots<\theta_n=\beta$

donde: $\quad \Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}\;,\; i=1,2,\ldots,n$

2. Sea: $\bar{\theta}_i\in[\theta_{i-1},\theta_i]\,,\; i=1\,,2\,,\;\ldots,\; n$

3. El área del sector circular de radio $f(\bar{\theta}_i)$ y arco $\Delta\theta_i$, está dada por:

$$\tfrac{1}{2}\left[\,f(\bar{\theta}_i)\,\right]^2\cdot\Delta\theta_i \quad , \quad \bar{\theta}_i\in[\theta_{i-1}\,,\theta_i]$$

ésta área existe en cada intervalo $[\theta_{i-1},\theta_i]$.

Como existen n intervalos, entonces la suma de las medidas de las áreas de los n sectores circulares es:

$$\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}\left[\,f(\bar{\theta}_i)\,\right]^2\cdot\Delta\theta_i$$

4. Si $\|\Delta\|=\text{máx}\left\{\,\Delta\theta_i\,/\,i=1,2,\ldots,n\,\right\}$, entonces:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}\left[\,f(\bar{\theta}_i)\,\right]^2\cdot\Delta\theta_i=\tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\,f(\theta)]^2\cdot d\theta$$

Ejemplo 01. Encontrar el área de la región acotada por la gráfica de $r=4\cos 2\theta$.

Solución:

1. Hacer una breve discusión de la ecuación para graficar la curva.

a) ***INTERSECCIONES:*** Con el eje polar, eje $\frac{\pi}{2}$, eje π, eje $\frac{3\pi}{2}$

0	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\vec{r}$	4	0	-4	0

b) ***SIMETRÍAS:*** Cuando la ecuación polar es función solo del *coseno*, siempre existe simetría respecto al eje polar.
Para probar, bastará hacer el cambio $(r,-\theta)$ y se observará que la ecuación no varía.

c) ***EXTENSIÓN:*** Como el coseno es acotado, se tiene:

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

$$\Rightarrow \quad -4 \le 4\cos\theta \le 4$$

$$\Rightarrow \quad |4\cos\theta| \le 4$$

Este resultado nos indica que la curva esta acotada por una circunferencia de radio 4.

d) ***LIMITES DE INTEGRACIÓN:*** Si existen soluciones para la ecuación $r=0$, se obtendrán los límites de integración.

Asi: $4\cos 3\theta = 0$

$$\cos 3\theta = 0$$

$$3\theta = \tfrac{\pi}{2} + k\pi$$

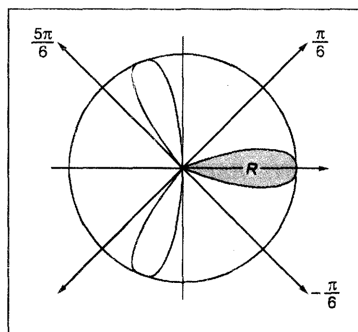
$$\theta = \tfrac{\pi}{6} + \tfrac{k\pi}{3}$$

$$\theta = \left\{ -\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{6}, \tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{2\pi}{3} \right\}$$

La función *coseno* es decreciente en el primer cuadrante desde "4" hasta "0", luego r disminuye desde 4 hasta 0, cuando:

$$0 \le \cos 3\theta \le 1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\pi}{2} \ge 3\theta \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\pi}{6} \ge \theta \ge 0$$

2. Para hallar el área total bastará calcular el área de la región limitada por un solo pétalo.



$$A(R) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4\cos 3\theta)^2 \cdot d\theta$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta \, d\theta = 16 \left[\tfrac{\theta}{2} + \tfrac{1}{16} \operatorname{sen} 6\theta \right] \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}}$$

$= \frac{4\pi}{3}$ ⟵ **área de la región encerrada por un pétalo**

El área total es: $A = 3\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 4\pi$

Ejemplo 02. Hallar el área de la región acotada por la gráfica de la ecuación $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$.

Solución:

1. Breve discusión de la gráfica de la ecuación:

a) ***INTERSECCIONES:***

Con el eje polar, eje $\frac{\pi}{2}$, con π y con $-\frac{\pi}{2}$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$
r	0	0	0	0

b) ***LIMITES DE INTEGRACIÓN:***

Si existen soluciones para $r = 0$, se obtendrán los límites de integración.

Veamos:

$$\text{Si } r = 0 \Rightarrow \quad 0 = 4\operatorname{sen} 2\theta$$

$$0 = \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\Rightarrow 2\theta = k\pi$$

$$\theta = \frac{k\pi}{2}$$

Este resultado nos explica que el radio se reduce a cero cuando el arco es 0°, $\pi/2$, π , $3\pi/2$. (que serán los límites de integración).

c) ***EXTENSIÓN:***

Se cumple: $r^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot \text{sen} 2\theta \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen} 2\theta \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 2\theta \leq \quad \vee \quad 2\pi \leq 2\theta \leq 3\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2} \quad \vee \quad \pi \leq \theta \leq \tfrac{2\pi}{2}$$

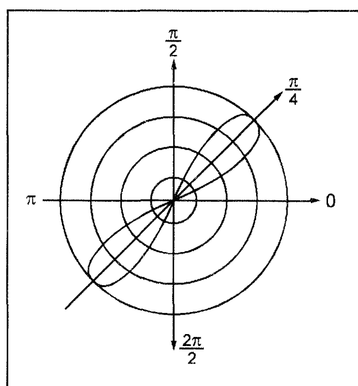
En estos intervalos está definida la curva.

c) ***SIMETRÍAS:***

Sólo existe simetría respecto al origen, porque al hacer el cambio (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ no cambia la ecuación.

d) ***TABULACIÓN:***

Tabular en los intervalos $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$



2. El área es:

$$A = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cdot \text{sen}\, 2\theta \, d\theta$$

$$= 4$$

También se puede hacer:

$$A = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cdot d\theta$$

$$= 4.$$

Ejemplo 03. Encontrar el área de la región que está acotada por el rizo más pequeño de la gráfica de la ecuación $r = 1 + 3\,\text{sen}\theta$.

Solución:

1. Hacer una breve discusión de la ecuación para graficar:

a) ***INTERSECCIONES:***

θ	0	$\pi/2$	π	$2\pi/2$
r	1	4	1	–2

b) ***LIMITE DE INTEGRACIÓN:***

Si $r = 0 \Rightarrow 0 = 1 + 3\,\text{sen}\,\theta$

$$\theta = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

Este resultado nos explica que el radio de r se reduce a cero cuando el arco es $\theta = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)$ que será un límite de la integral a calcularse.

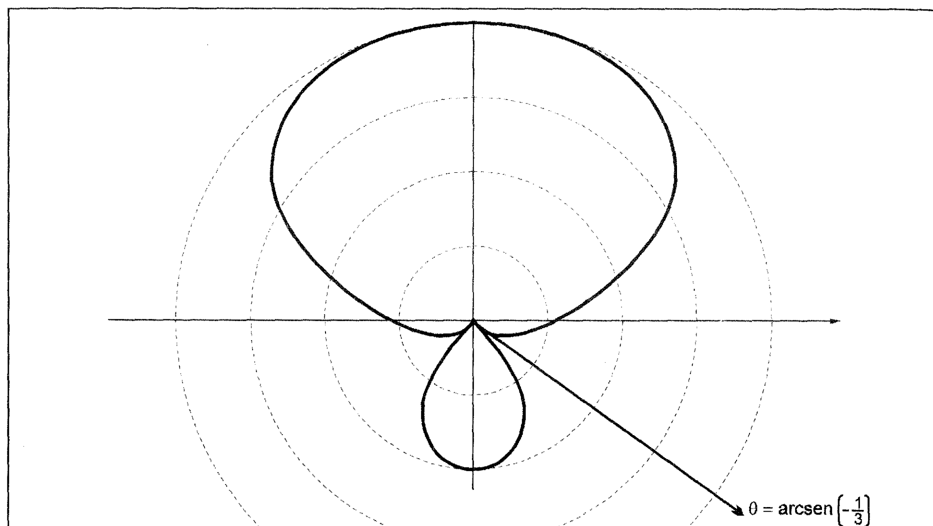
c) ***SIMETRÍA:***

Porque la función sólo depende de sen θ, entonces es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

Al hacer el cambio $(r\,,\,\pi - \theta)$ no varía la ecuación.

d) Como la curva es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$ y pasa por los puntos $\left(4\,,\,\pi/2\right)$, $\left(-2\,,\,3\pi/2\right)$; entonces bastará tabular desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$ pasando por arcsen $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

θ	$-\pi/2$	$-\pi/4$	–20°	arcsen $(-1/3)$	–25°	–10°	45°	$\pi/2$
r	–2	–1.1	–0.02	0	–0.2	0.47	3.1	4



El área de la región encerrada por el rizo más pequeño es:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)} r^2 \cdot d\theta$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(1 + 3\operatorname{sen}\theta\right)^2 \cdot d\theta$$

$$= \frac{11}{4}\pi - \frac{11}{2} \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right) - 3\sqrt{2}$$

Nota: *Tener en cuenta lo siguiente:*

1) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right)$

2) [Triángulo: cateto $2\sqrt{2}$, cateto -1, hipotenusa 3, ángulo θ] $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

OBSERVACIÓN

Como podrá observar el lector hasta el momento, hallar el área no reviste dificultad si se conocen los límites de integración. El gran problema es hallar los límites de integración.

Si la región está encerrada por una curva, los límites de integración se hallan teniendo en cuenta las siguientes recomendaciones:

1) Resolver la ecuación $r = 0$.
   Se presentan dos casos: existe solución o no existe solución.
   a) Si existen soluciones, dichas soluciones serán los límites de integración.
   b) Si no existe solución y la curva es cerrada, entonces los límites de integración se pueden escoger los extremos de $[0, 2\pi]$ o cualquier θ_0 en radianes y $\theta = \theta_0 + 2\pi$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$.

2) Observar las simetrías.

Ejemplo 04. Hallar el área de la región encerrada por la curva $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (lemniscata de Bernoulli).

Solución:

1. Breve discusión de la ecuación.

a) ***INTERCEPTOS:***

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	$\pm a$	$\nexists$	$\pm a$	$\nexists$

b) ***LIMITES DE INTEGRACIÓN:***

$$\text{Si: } r = 0 \Rightarrow 0 = a^2 \cdot \cos 2\theta$$
$$0 = \cos 2\theta$$
$$2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \leftarrow \text{Limites}$$

c) ***SIMETRÍAS:*** Hay simetría respecto al eje polar (hacer el cambio por $(r, -\theta)$) y respecto al origen hacer el cambio por $(r, \theta + \pi)$, la ecuación no se altera.

d) ***EXTENSIÓN:***

$$r^2 \geq 0 \quad , \quad \forall r \quad \Rightarrow \quad a^2 \cdot \cos 2\theta \geq 0$$
$$\cos 2\theta \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{3\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{5\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$$

Son los límites de Integración

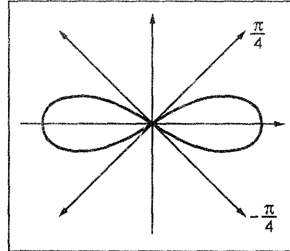
e) ***TABULACIÓN:***

Aprovechando las simetrías, bastará tabular en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

2. El área es: $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \cdot d\theta$

$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta$

$= a^2$



Ejemplo 05. Calcular el área de la región limitada por las curvas $r = 2a\cos\theta$ y $r = a(1+\cos\theta)$.

Solución:

Nota:
Cuando una región está limitada por dos o más curvas, hacer dos cosas:

1) Resolver el sistema $\begin{cases} r = 2a \cdot \cos\theta & \longleftarrow \textbf{circunferencia} \\ r = 2(1+\cos\theta) & \longleftarrow \textbf{cardioide} \end{cases}$

para hallar los límites de integración.

2) Graficar.

Veamos:

1. $2a\cos\theta = a(1+\cos\theta)$

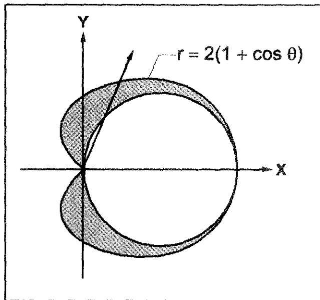
$2\cos\theta = 1 + \cos\theta$

$\cos\theta = 1$

$\theta = 2k\pi \pm 0$

$\theta = 2k\pi \longrightarrow \begin{cases} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{cases}$

2. Gráfico:



Hay simetría respecto al eje polar.

Porque el círculo está contenido dentro de la cardioide, el área es la diferencia de las áreas limitadas por las dos curvas.

$$A = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \left\{ \left[2a\cos\theta \right]^2 - \left[a(1+\cos\theta) \right]^2 \right\}$$

$$= \frac{3\pi a^2}{2} - \pi a^2 = \frac{a^2}{2}$$

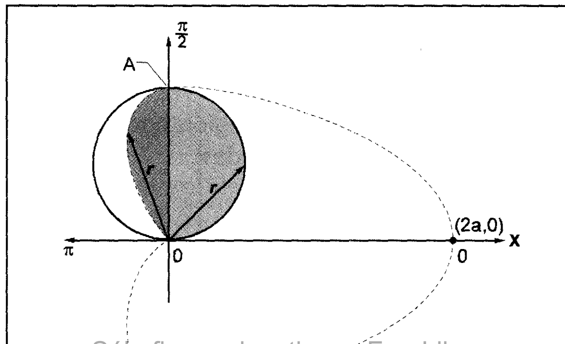
Ejemplo 06. Calcular el área del interior de las curvas: $r = a\,sen\theta$ y $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$.

Solución:

1. Graficar.

$r = a\ \text{sen}\theta$, es una circunferencia de centro en $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ y radio $\frac{a}{2}$

$r = a\,(1+\cos\theta)$, es una cardioide.



2. Límites de integración.

La intersección de las curvas se obtiene resolviendo.

$$a \cdot \operatorname{sen}\theta = a(1+\cos a)$$

$$\operatorname{sen}\theta = 1+\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \cos\theta \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta - \tfrac{\pi}{4} = k\pi + (-1)^k \tfrac{\pi}{4}$$

$$\theta = k\pi + \tfrac{\pi}{4}\left(1+(-1)^k\right) \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \pi \end{cases}$$

Límites

3. Cálculo del área.

Observar el gráfico: Al girar el radio vector ***r*** desde el eje polar $\overrightarrow{OX}$, en sentido antihorario, barriendo toda la región, pasa por $A=\left(\frac{\pi}{2}, a\right)$ hasta llegar hasta $\theta = \pi$.

Porque A es un ***punto anguloso***, el área se halla con dos integrales:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cdot\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta + \tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[a(1+\cos\theta)\right]^2 \cdot d\theta$$

$$= \tfrac{a^2}{2}(\pi - 2)$$

Ejemplo 07. Encontrar el área de la región que está acotada por las gráficas de las dos ecuaciones dadas:

$$\begin{cases} r = 2 \\ r = 3 - 2\cdot\cos\theta \end{cases}$$

Solución:

1. Graficar cada curva.

a) $r = 2$ es una circunferencia de centro en el origen y radio 2.

b) $r = 3 - 2\cos\theta$.

b_1) Intersecciones:

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	1	2	5	3

b_2) Si $r = 0 \Rightarrow 0 = 3 - 2\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{3}{2}$, esta igualdad implica que no existe solución .

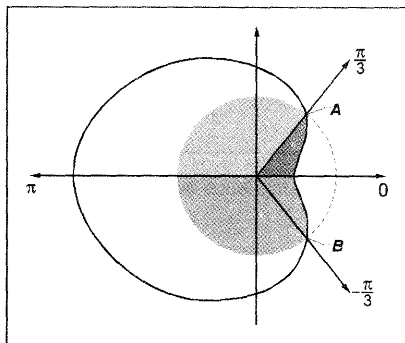
Es mayor que uno

El máximo valor de coseno es 1. En este caso el conjunto solución es vacío. Geométricamente este resultado nos indica que el radio ***r*** nunca se reduce a cero.

c) Extensión: Como : $-1 \leq \cos\theta \leq 1$
Por -2 : $2 \geq -2\cos\theta \geq -2$
Sumar 3 : $5 \geq 3 - 2\cos\theta \geq 1$

Este resultado implica que la curva es cerrada de radio mínimo $r = 1$ y radio máximo $r = 5$.

El gráfico es:



2. Hallar las intersecciones:

$$2 = 3 - 2\cos\theta$$

$$\frac{1}{2} = \cos\theta$$

$$\boxed{0 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}}$$

Necesitamos:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

3. El área de la región que es intersección de los planos encerrados por dos curvas se halla sumando dos integrales, porque A es punto anguloso.

$$A = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 - 2\cos\theta)^2 \cdot d\theta + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 2^2 \cdot d\theta$$

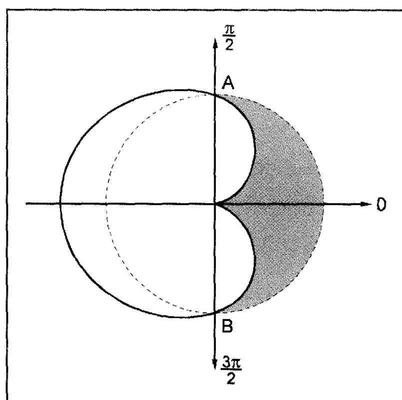
$$= \tfrac{11\pi}{3} - \tfrac{11\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad + \tfrac{8\pi}{3}$$

$$= \tfrac{19\pi}{3} - \tfrac{11\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 08. Calcular el área de la región que es interior a la curva $r = a$ y exterior a la curva $r = a\,(1 - \cos\theta)$.

Solución:

1. El gráfico es:



2. La intersección de ambas curvas se hallan resolviendo la ecuación:

$$a = a(1 - \cos a)$$

$$1 = 1 - \cos\theta$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \tfrac{\pi}{2} + k \text{ , se necesitan } \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

3. Porque hay simetría respecto al eje polar, el área es:

$$A = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ a^2 - [a(1-\cos\theta)]^2 \right\} \ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a^2 - a^2 + 2a^2 \cdot \cos\theta - a^2 \cdot \cos^2\theta] \cdot d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\cos\theta - \cos^2] \cdot d\theta$$

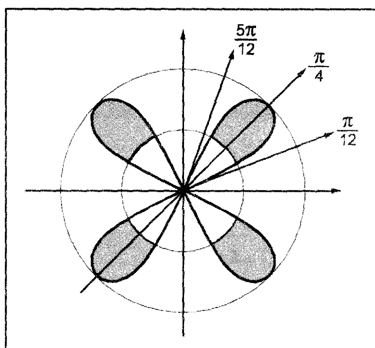
$$= a^2 \left[2\operatorname{sen}\theta - \tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta \right] \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= a^2 \left(2 - \tfrac{\pi}{4} \right)$$

Ejemplo 09. Hallar el área de la región que es interior a la curva $r = 2\operatorname{sen}2\theta$ y exterior a la curva $r = 1$.

Solución:

1. El gráfico es:



2. *INTERSECCIÓN:*

$$1 = 2 \cdot \operatorname{sen}2\theta$$

$$\tfrac{1}{2} = \operatorname{sen}2\theta$$

$$2\theta = k\pi + (-1)^k \tfrac{\pi}{6}$$

$$\theta = \tfrac{k\pi}{2} + (-1)^k \tfrac{\pi}{12}$$

Son las intersecciones

$$\theta = \tfrac{\pi}{12}, \tfrac{5\pi}{12}, \tfrac{19}{12}\pi, \tfrac{23\pi}{12}, \ldots$$

Por la simetría existente, necesitamos sólo $\theta = \frac{\pi}{12}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$ para integrar.

3. El área es: $$A = 8 \cdot \tfrac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} [(2\operatorname{sen}2\theta)^2 - 1]\, d\theta$$

$$= \sqrt{3} + \tfrac{2\pi}{3}$$

Ejemplo 10. Hallar el área de la región encerrada por las curvas $r = 3 + \cos 4\theta$ y $r = 2 - \cos 4\theta$.

Solución:

1. Discutir la ecuación: $r = 3 + \cos 4\theta$

a) **Intersecciones:**

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	4	4	4	4

$r = 3 + \cos 4\theta$

b) Veamos si el radio r se reduce a cero:

Hacer: $r = 0 \Rightarrow 0 = 3 + \cos 4\theta$

$-3 = \cos 4\theta$ ← **Absurdo**

Este resultado nos indica que el radio nunca es cero.

c) **Extensión:**

Se cumple : $-1 \leq \cos 4\theta \leq 1$

Sumar 3 : $2 \leq 3 + \cos 4\theta \leq 4$

Esto implica que la curva es cerrada y está acotada por las circunferencias de radio 2 y radio 4. Es decir el mínimo valor que tiene r es 2 y el máximo valor es 4.

d) **Simetría:**

Es simétrica respecto al eje polar : Cambiar por $(r, -\theta)$

Es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$: Cambiar por $(r, \pi - \theta)$

Es simétrica respecto al POLO : Cambiar por $(r, \pi + \theta)$

e) **Monotonía:** (Crecimiento y decrecimiento de la función).

Estudiemos la variación de θ y r en cada cuadrante:

– Si $0 \leq 4\theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4 \geq r \geq 3$ (Decreciente)

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$

– Si $\frac{\pi}{2} \leq 4\theta \leq \pi \Rightarrow 3 \geq r \geq 2$ (Decreciente)

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

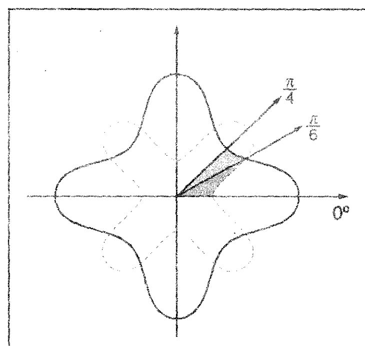
– Si $\pi \leq 2\theta \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2 \leq r \leq 3$ (Creciente)

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

– Si $\frac{3\pi}{2} \leq 2\theta \leq 2\pi \Rightarrow 3 \leq r \leq 4$ (Creciente)

$\frac{3\pi}{4} \leq 0 \leq \pi$

f) **Tabulación:**
Dando pocos valores y observando la monotonía, el gráfico correspondiente es:



2. Discutir la ecuación $r = 2 - \cos 4\theta$

Sugerencia: Analizar de manera similar.

3. Intersección:

Igualar las dos ecuaciones y resolver

$$3 + \cos 4\theta = 2 - \cos 4\theta$$

$$\cos 4\theta = -\frac{1}{2}$$

$$4\theta = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{\theta = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}}$$

4. Calculo del Área: Porque hay simetría respecto a $\frac{\pi}{4}$, bastará calcular el área desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$ pasando por $\frac{\pi}{6}$ *(punto anguloso)*.

Así: $$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 - \cos 4\theta) \cdot d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (3 + \cos 4\theta) \cdot d\theta$$

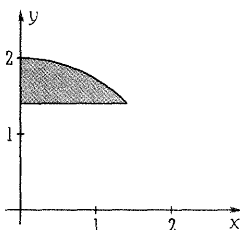
El área total, será: $A = 8A_1 = \frac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$

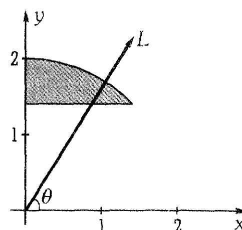
PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS - RESUELTOS

Problema 01.- Determine los límites en forma que para región acotada por el círculo $x^2+y^2=4$ y la recta $y=\sqrt{2}$.

Solución:

Se procede de la misma manera para identificar las regiones en coordenadas rectangulares, esto se hace un dibuja de la región y se traza el rayo de prueba.





El rayo L siempre entra en la región por la recta $y=\sqrt{2}$ y sale por la curva $x^2+y^2=4$ Estas ecuaciones en coordenadas polares son, para la curva.

$$(r\cos\theta)^2+(r\,\text{sen}\,\theta)^2=r^2(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)=4$$

$$r^2=4$$

$$r=2$$

y para la recta: $\quad r\,\text{sen}\,\theta=\sqrt{2}$

$$r=\frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,\theta}$$

$$r=\sqrt{2}\csc\theta$$

El ángulo mínimo es la intersección de la recta con la curva.

$$r=2=\frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\theta=\text{arc sen}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

y el ángulo máximo es $\frac{\pi}{2}$, la región se especifica como:

$$R=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leq\theta\frac{\pi}{2},\ \sqrt{2}\csc\theta\leq r\leq 2\right\}$$

y la integral doble: $\int\int_R f(r,\theta)dA = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\sqrt{2}\csc\theta}^{2} f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$

Área en coordenadas polares

Al igual que el coordenadas rectangulares, si $f(x,y)=1$, el resultado de la integral doble es el área de la región plana, esto es:

$$\text{Área} = \int\int_R r\, dA$$

dónde $dA = dr\, d\theta = d\theta\, dr$. Y para los sólidos sobre la región plana en el plano xy limitado por la superficie $f(x,y)$, la integral doble que da el volumen se transforma en:

$$V = \int\int_R f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) r\, dA$$

donde la ecuación de la superficie se convierte a coordenadas polares al sustituir $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\theta$.

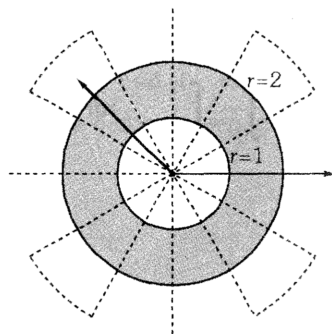
Problema 02.- Calcular el área entre los círculos de radio 1 y radio 2 con el mismo centro.

***Solución*:**

Por facilidad, se considera que el centro de ellos en el origen (0,0), por lo que las ecuaciones de ellos son:

$x^2 + y^2 = 1$, y en coordenadas polares $r = 1$

$x^2 + y^2 = 4$, y en coordenadas polares $r = 2$



Puesto que las ecuaciones de los círculos son más sencillas en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares, se calcula el área en coordenadas polares. Para el análisis, se hace un bosquejo de la región (con winplot) y se traza un rayo desde el origen que cruce la región.

El rayo entra por el círculo de radio 1 y sale por el círculo de radio 2, y el ángulo es desde 0 hasta 2π para que el rayo pase por toda la región. La región se especifica con:

$$R = \{(r,\theta)\,|\,0 \le \theta \le 2\,,1 \le r \le 2\}$$

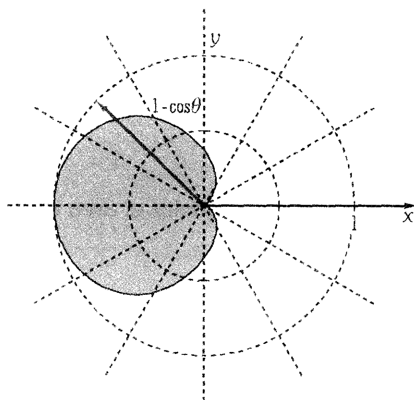
Los límites para ambos, θ y r son constantes, por lo tanto, se puede utilizar cualquier orden de integración $dr\,d\theta$ o $d\theta dr$. La integral doble para el cálculo del área es.

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_1^2 \;\;,\;\; d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}(4-1)\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{3}{2}d\theta = \tfrac{3}{2}\Big]_0^{2\pi} = 3\pi$$

Problema 3.- Calcular el área de la superficie limitada por la curva $r = 1-\cos\theta$.

Solución:

Se hace un bosquejo de la región (con winplot en coordenadas polares) y se traza un rayo desde el origen.



En la figura se observa que el rayo, entra a la región por el origen y sale por la curva $r = 1-\cos\theta$, 0 sea, que los límites son 0 y $1-\cos\theta$. Al girar el rayo para cubrir toda la región, el ángulo varía de 0 a 2π. La región se especifica como:

$$R = \{(r,\theta)\,|\,0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 1-\cos\theta\}$$

La integral doble para calcular el área es:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} rdr,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{1-\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}-(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}-\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}-\cos\theta+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{4}\theta - \text{sen}\theta + \frac{1}{8}\text{sen}2\theta \right]_0^{2\pi}$$

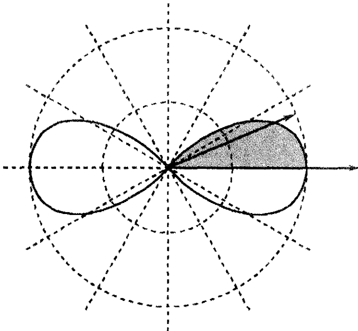
$$= \frac{3}{2}\pi - \text{sen}\,2\pi + \text{sen}\,0 - 0 + \frac{1}{8}\text{sen}4\pi - \frac{1}{8}\text{sen}\,0 = \frac{3}{2}\pi$$

El área es $\frac{3}{2}\pi u^2$.

Problema 04.- Calcular el área encerrada por la leminiscata $r^2 = 4\cos 2\theta$

Solución:

Se hace un bosquejo de la región:



Se observa que la región es simétrica, y el área es 4 veces la de la sección del primer cuadrante. Los límites de r son cero y $\sqrt{4\cos 2\theta}$. Al mover el rayo (lado positivo del eje x), o sea $0°$, hasta el punto contrario, cuando $r = 0$, el ángulo final se calcula con $r = 0 = \sqrt{4\cos 2\theta}$, que da $\theta = \frac{\pi}{4}$.

La región se especifica con:

$$R = \{(r,\theta) \,|\, 0 \le \theta\pi / 4, 0 \le r \le \sqrt{4\cos 2\theta}\}$$

y el área se calcula como:

$$\text{Área} = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta = 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta$$

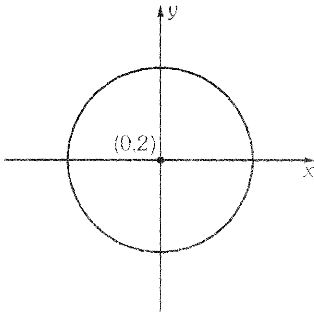
$$= 4\text{sen}\,2\theta \Big]_0^{\pi/4} = 4(\text{sen}(2\pi/4) - \text{sen}\,0) = 4$$

Problema 05.- Determine el área de la región por la curva o curvas, según sea el caso:

$$r = 4\text{sen}\theta$$

Solución:

$r = 4\text{sen}\theta$, se trata de una circunferencia con centro en (0,2) y radio 2.



$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (4\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta\right]$$

$$=16\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$=16\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = 8\left[\theta-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]^{\pi/2}$$

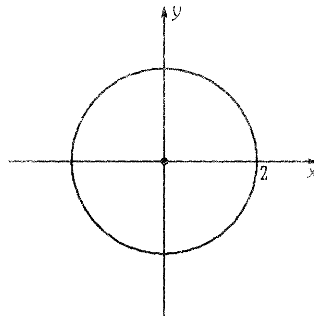
$$=8\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=4\pi u^2$$

Problema 06.- Determine el área de la región limitada por la curva o curvas, según sea el caso:

$$r=4\operatorname{sen}\theta$$

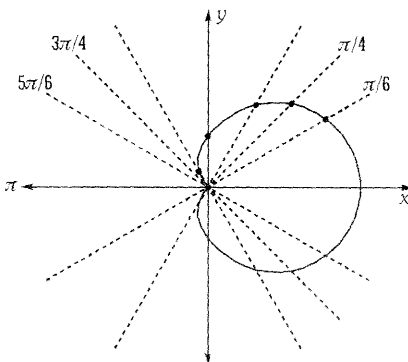
Solución:

$r=4\operatorname{sen}\theta$, se trata de una circunferencia con centro en (0,2) y radio 2.



$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (4\operatorname{sen}\theta) d\theta\right]$$

$$=16\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$



$r=1+\cos(\pi-\theta) \quad \Rightarrow \quad r=1-\cos\theta \quad$ o

$-r=1+\cos(-\theta) \quad \Rightarrow \quad -r=1+\cos\theta$

La gráfica tampoco es simétrica con respecto al polo, debido a que:

$-r=1+\cos\theta, \quad$ o

$r=1+\cos(\pi+\theta) \quad \Rightarrow \quad r=1-\cos\theta$

$$A = 2\left[\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta\right] = \int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2)d\theta = \int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(2+4\cos\theta 2\theta)d\theta = \tfrac{1}{2}\left[3\theta+4\text{sen}\,\theta+\tfrac{1}{2}\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}\left[3(\pi-0)+4(0-0)+\tfrac{1}{2}(0-0)\right]$$

$$A = \tfrac{1}{2}(3\pi)u^2$$

Problema 7.- $r = 2\cos 4\theta$

Solución:

Para realizar la gráfica analizamos la simetría con los ejes y el polo.

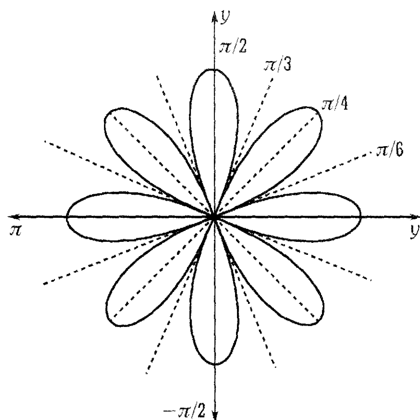
- Con respecto al eje polar: $r = 2\cos 4(-\theta) \quad \Rightarrow \quad r = 2\cos 4\theta$, es simétrica.
- Con respecto al eje $\pi/2$: $r = 2\cos 4(\pi-\theta) \quad \Rightarrow \quad r = 2\cos 4\theta$, es simétrica.
- Con respecto al polo: $r = 2\cos 4(\pi+\theta) \quad \Rightarrow \quad r = 2\cos 4\theta$, es simétrica.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	2	–1	–2	–1	2

Determinando en período para el cual.

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos 4\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 4\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\theta = \tfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tfrac{\pi}{8}$$



Luego:

$$A = 16\left[\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/8}(2\cos 4\theta)^2 d\theta\right]$$

$$= 8\int_0^{\pi/8} 4\cos^2 4\theta\, d\theta$$

$$= 32\int_0^{\pi/8}\left(\frac{1+\cos 8\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= 16\left[\theta+\tfrac{1}{8}\text{sen}\,8\theta\right]_0^{\pi/8} = 16\left(\tfrac{\pi}{8}+0\right)$$

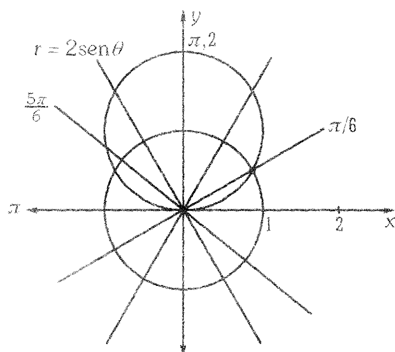
$$A = 2\pi u^2$$

Problema 08.- Dentro de $r = 2\text{sen}\theta$ y fuera de $r = 1$

Solución:

Note que $r = 2\text{sen}\theta$ es una circunferencia de radio 1 y centro en (0,1). Mientras que $r = 1$ determina una circunferencia de centro en (0,0) y radio 1.

Intersección entre las curvas:
$2\text{sen}\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ó $\theta = \frac{5\pi}{6}$, esto implica que los puntos de intersección son $(1, \pi/6)$ y $(1, 5\pi/6)$.



Luego:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{[f(\theta)]^2 - [1]^2\} d\theta$$

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} ([2\text{sen}\theta]^2 - [1]^2)d\theta\right] = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (2\text{sen}4^2\theta - 1)d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 1\right)d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta)d\theta = \left[\theta - \text{sen}2\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)u^2$$

Problema 09.- Dentro de $r = \cos\theta$ y fuera de $r = \sqrt{3}\,\text{sen}\theta$.

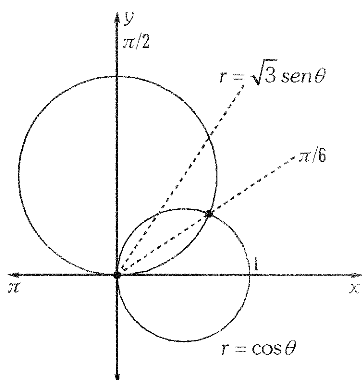
Solución:

Vemos que $r = \cos\theta$ representa una circunferencia de radio 1/2 y centro en (1,2,0). $r = \sqrt{3}\,\text{sen}\theta$ representa una circunferencia de radio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y centro en $(0, \sqrt{3}/2)$. Ahora determinemos los puntos de intersección entre ambas curvas:

$\cos\theta = \sqrt{2}\,\text{sen}\theta \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$, de donde obtenemos el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Pero cuando $r = 0$ tenemos:

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{0,\pi}{2}\right) \\ \sqrt{3}\,\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow (0,\pi) \end{cases}$$



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (\cos^2\theta - 3\text{sen}^2\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (1 - 4\text{sen}^2\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \left(1 - 4\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (2\cos 2\theta - 1)d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\text{sen}2\theta - \theta\Big]_0^{\pi/6} + \frac{1}{4}\Big[\theta + \frac{1}{2}\text{sen}2\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right)u^2$$

Problema 10.- Dentro de $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de $r = \cos\theta$.

Solución:

Vemos que $r = \cos\theta$ representa una circunferencia de radio 1/2 y centro en (1/2,0). Por otro lado, $r = 1 + \cos\theta$, representa un cardioide. Ahora determinamos los puntos de intersección: $1 + \cos\theta = \cos\theta \iff 1 = 0$, de donde concluimos que no existe intersección.

Pero cuando $r = 0$ tenemos:

$$\begin{cases} 1 + \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow (0,\pi) \\ \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (0\,,\pi/2) \end{cases}$$

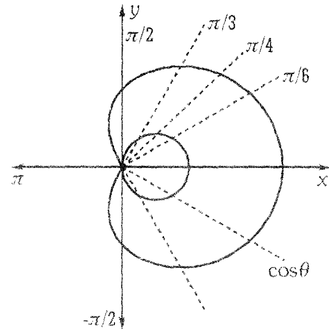
$$A = 2\left\{\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta}_{\textbf{área de la cardioide}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta}_{\textbf{área del círculo}}\right\}$$

$$= \int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta - \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2+4\cos\theta+\cos 2\theta)d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[3\theta+4\text{sen}\,\theta+\frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\text{sen}2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}(3\pi) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}u^2$$



Problema 11.- Dentro de $r^2 = \cos 2\theta$ y fuera de $r^2 = \text{sen}\,\theta$

Solución:

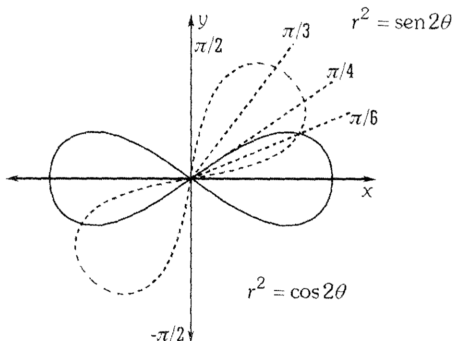
Según la gráfica vemos que ambas ecuaciones describen curvas que son simétricas, por lo tanto trabajaremos sólo con la parte positiva. Como $r^2 = \cos 2\theta$, entonces $\cos 2\theta \geq 0 \Rightarrow 2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de donde $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, lo que significa que esta curva está definida en ese intervalo. Por otro lado, tenemos que $r^2 = \text{sen}2\theta$ implica.

$$\text{sen}2\theta \geq 0 \;\Rightarrow\; 2\theta \in [0,\pi] \;\Rightarrow\; \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

La intersección entre las curvas ocurre cuando $\theta = \frac{\pi}{8}$, pues:

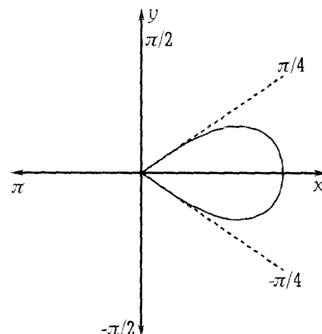
$$\cos\theta = \text{sen}\,2\theta \;\Rightarrow\; \tan 2\theta = 1 \;\Rightarrow\; 2\theta = \frac{\pi}{4}$$

de donde $\theta = \frac{\pi}{8}$.



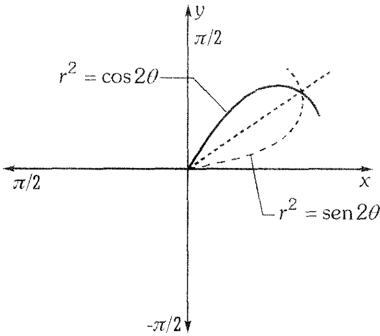
Ahora determinaremos el área de la región sombreada (de la derecha)

i) Calculamos el área de la región limitada por $r^2 = \cos 2\theta$.



$$A_1 = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sqrt{\cos 2\theta})^2\,d\theta\right) = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta\right] = \left[\frac{1}{2}\text{sen}2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}[1-0] = \frac{1}{2}u^2$$

ii) Calculamos el área de la región limitada por ambas curvas.



$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/8}\text{sen}2\theta\,d\theta + \int_{\pi/8}^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left([-\cos 2\theta]_0^{\pi/8} + [\text{sen}2\theta]_{\pi/8}^{\pi/4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{1}{4}[2-\sqrt{2}]u^2$$

Luego, el área de la región sombreada a la derecha (gráfico 1) es:

$$A_1 - A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2-\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Por lo tanto el área de toda la región sombreada será:

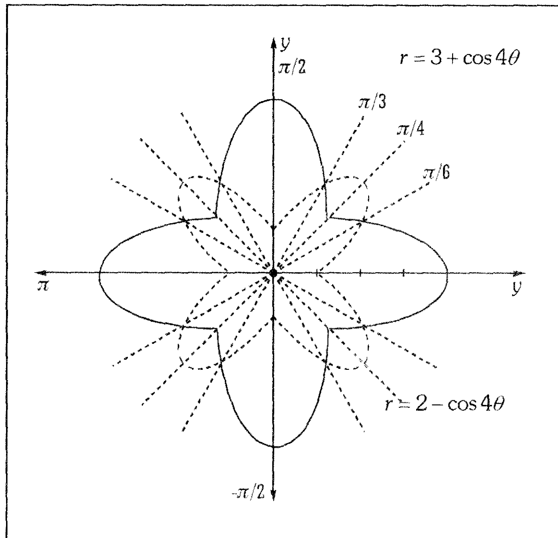
$$A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}u^2$$

Problema 12.- La región es interior a las curvas $r = 3 + \cos 4\theta$ y $r = 2 - \cos 4\theta$.

***Solución*:**

Ambas curvas son simétricas con respecto al eje polar, al eje π y al polo. Luego, para graficar las curvas tenemos:

θ	$r = 3 + \cos 4\theta$	$r = 2 - \cos 4\theta$
0	4	1
$\frac{\pi}{6}$	2.5	2.5
$\frac{\pi}{4}$	2	3
$\frac{\pi}{3}$	2.5	2.5
$\frac{\pi}{2}$	4	1



Podemos determinar el área de la región sombreada (más oscura) y multiplicamos ésta por 8 para obtener el área total sombreada. Necesitamos hallar el punto de intersección entre las curvas (para obtener los límites de integración. Así,

$$3+\cos 4\theta = 2-\cos 4\theta = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow 4\theta = \tfrac{2\pi}{3} \quad \vee \quad 4\theta = \tfrac{4\pi}{3} \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{6} \quad \vee \quad \theta = \tfrac{\pi}{3}$$

Para nuestro caso empleamos $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (2-\cos 4\theta)^2\, d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/4} (3+\cos 4\theta)^2\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/6} (4-4vos4\theta+\cos^2 4\theta)\, d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/4} (9+64\theta+\cos^2 4\theta) d\theta\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/6} \left(4-4\cos 4\theta+\tfrac{1+\cos 8\theta}{2}\right) d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(9+6\cos 4\theta+\tfrac{1+\cos 8\theta}{2}\right) d\theta\right]$$

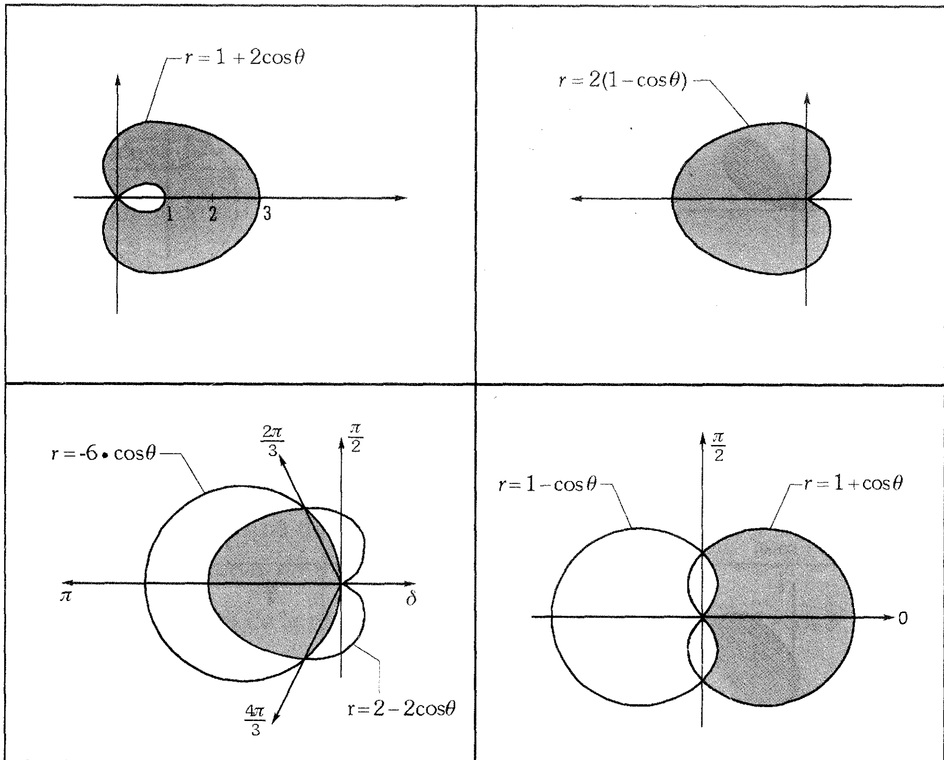
⋮

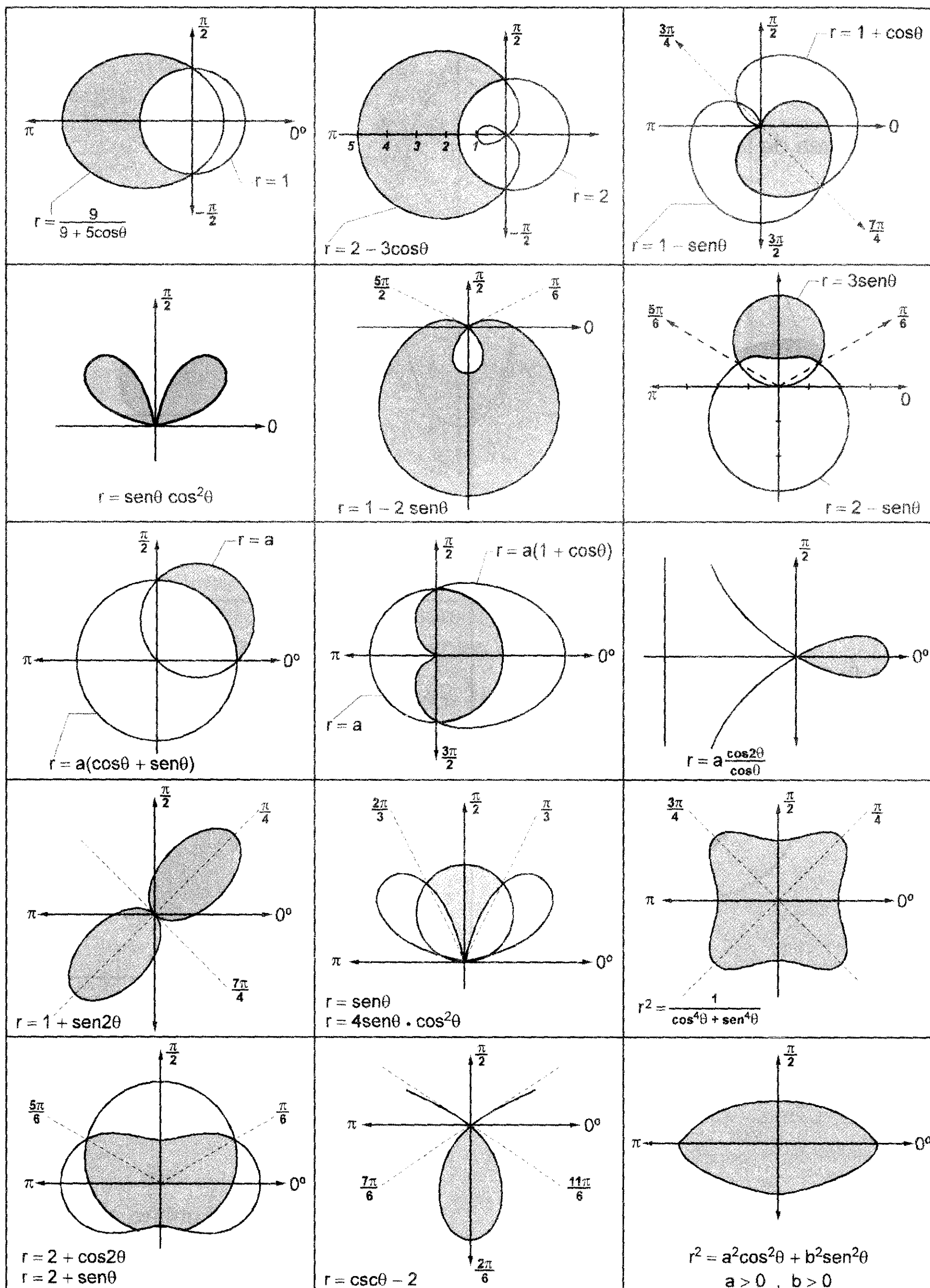
Continuar...

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 1

Hallar el área de la región sombreada.




r = 1
r = 9 / (9 + 5cosθ)
r = 2
r = 2 − 3cosθ
5 4 3 2 1
r = 1 + cosθ
r = 1 − senθ
3π/4
7π/4
r = senθ cos²θ
r = 1 − 2 senθ
5π/2
π/6
r = 3senθ
r = 2 − senθ
5π/6
r = a
r = a(cosθ + senθ)
r = a(1 + cosθ)
r = a
r = a cos2θ/cosθ
r = 1 + sen2θ
π/4
7π/4
r = senθ
r = 4senθ · cos²θ
2π/3
π/3
r² = 1 / (cos⁴θ + sen⁴θ)
r = 2 + cos2θ
r = 2 + senθ
r = cscθ − 2
7π/6
11π/6
2π/6
r² = a²cos²θ + b²sen²θ
a > 0 , b > 0

GRUPO 2

Encontrar el área de la región acotada por la gráfica de la ecuación dada.

01 $r = 3\cos\theta$

02 $r = 2 + 2\cos\theta$

03 $r = 3\cos 3\theta$

04 Un pétalo de $r = 2\cos 3\theta$

05 Un pétalo de $r = \cos\frac{3\theta}{2}$

06 Interior de $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

07 Interior de $r = \frac{3}{2 - \cos\theta}$

08 Lazo interior de $r = 1 + 2\cos\theta$

09 $r = a\,(1 - \operatorname{sen}\theta)$

10 $r = a \cdot \operatorname{sen} 3\theta$

GRUPO 3

11 Encuentre el área de la región que está fuera de la curva $r = 2a\operatorname{sen}\theta$ y dentro de la curva $r = a\,(1 + \cos\theta)$.

12 Hallar el área de la región que está dentro de la curva $r = 4 \cdot \cos\theta$ y fuera de la curva $r = 2$.

13 Calcular el área de la región que está dentro de la curva $r = 3 \cdot \cos\theta$ y fuera de la curva $r = 1 + \cos\theta$.

14 Hallar el área de la región interior encerrada por las curvas: $r = 2 + \cos 2\theta$, $r = 2 - \cos 4\theta$.

15 Encontrar el área de la región que es interior a $r = 2 + \cos 2\theta$ y exterior a $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

16 Hallar el área de la región limitada por la curva $r = 2a \cdot \cos 3\theta$, que está fuera del círculo $r = a$.

17 Hallar el área limitada por la curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$

Sugerencia: *Conviene pasar a polares, obteniéndose:* $r^2 = \frac{1}{\cos^4\theta + sen^4\theta}$

Hacer los propio con los problemas: 18, 19, 20, 21.

18 Hallar el área de la región limitada por la lemniscata de Bernoulli: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

19 Hallar el área de la región limitada por la lemniscata de Bernoulli que se halla dentro de la circunferencia. $2x^2 + 2y^2 = a^2$

20 Hallar el área de la región limitada por la curva $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$

21 Hallar el área de la figura acotada por la línea $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x\, y\, (x^2 - y^2)$

22 Hallar el área de la región limitada por la línea $r^2 = a^2 \cdot \cos n\theta$, $n \in \mathbb{Z}^+$

23 Hallar el área de la figura comprendida entre la parte externa e interna de la línea $r = a \cdot \text{sen}^3 \frac{\theta}{3}$.

Respuestas:

01 $\frac{9}{4}\pi$ **02** 6π **03** $\frac{3\pi}{4}$ **04** $\frac{\pi}{3}$

05 $\frac{\pi}{6}$ **06** $\frac{3\pi}{2}$ **07** $2\pi\sqrt{3}$ **08** $(2\pi - 3\sqrt{3})/2$

09 $\frac{3}{2}\pi a^2$ **10** $\frac{\pi a^2}{4}$ **11** $\frac{\pi a^2}{2}$ **12** $\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} + 2\pi\right)$

13 π **14** $\frac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$ **15** $\frac{51\sqrt{3}}{16}$ **16** $a^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

17 $\pi\sqrt{2}$ **18** a^2 **19** $a^2\left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

20 $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$ **21** a^2 **22** $a^2\left(\frac{5\pi + 18\sqrt{3}}{32}\right)$